Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 510.52+510.642

Чернов Алексей Вячеславович

О некоторых вариантах понятия реализуемости

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2003

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель —	доктор физико-математических наук, профессор Н. К. Верещагин.
Официальные оппоненты —	доктор физико-математических наук В. В. Вьюгин.
	кандидат физико-математических наук Ан. А. Мучник.
Ведущая организация —	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится „ ___“ _____ 200_ г. в 16 ч. 15 мин. на заседании дисссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан „ ___“ _____ 200_ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

1. Общая характеристика работы

1.1. Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию подхода к построению конструктивной семантики для формул исчисления высказываний, основанного на идеях алгоритмической теории информации.

Интуиционистская математика возникла в начале двадцатого века из философско-математических работ Л. Брауэра, связанных с критикой закона исключённого третьего. Начиная с этого времени исследования, посвящённые построению и анализу различных интуиционистски корректных логических систем, стали одним из основных направлений развития математической логики.

В 1932 году А. Н. Колмогоров[1] предложил истолкование интуиционистской логики, не опирающееся на философские идеи Брауэра. Вместо обычной интерпретации логических формул как операций, которые из нескольких элементарных высказываний создают новое, составное высказывание, Колмогоров стал рассматривать операции над задачами. Например, если A и B — некоторые задачи, то $A \wedge B$ есть задача, в которой требуется решить и задачу A, и задачу B. При таком подходе интуиционистская логика понимается как множество формул, для которых решение составной задачи можно указать, не зная решений элементарных задач.

Интерпретация Колмогорова не была формальной, в частности, он не уточнял, что такое задача и решение задачи. Первой математически строгой семантикой, основанной на аналогичных идеях, можно назвать реализуемость[2,3]. Другие формализации были рассмотрены Ю. Т. Медведевым — степени трудности массовых проблем[4] и исчисление финитных задач[5]. Однако оказалось, что построенные логики не

[1] A. Kolmogoroff. Zur Deutung der intuitionistishen Logik. *Math. Zeitschrift*, 1932, Bd. 35, H. 1, S. 58–65.

[2] S. C. Kleene. On the interpretation of intuitionistic number theory. *J. Symb. Logic*, 1945, v. 10, 109–124.

[3] G. F. Rose. Propositional calculus and realizability. *Trans. of AMS*, v. 75, N. 1, 1953, p. 1–19.

[4] Ю. Т. Медведев. Степени трудности массовых проблем. *ДАН СССР*, т. 104, № 4, 1955, с. 501–504.

[5] Ю. Т. Медведев. Финитные задачи. *ДАН СССР*, т. 142, № 5, 1962, с. 1015–1018.

совпадают с интуиционистской логикой высказываний (как и с классической логикой). Более того, аксиоматическое описание этих логик вызывает значительные трудности.

Алгоритмическая теория информации начала развиваться в 60-е годы двадцатого века. В основополагающей работе Колмогорова[6] были рассмотрены три подхода к определению количества информации: комбинаторный (через логарифм мощности множества возможных объектов), вероятностный (понятие шенноновской энтропии) и алгоритмический (через длину кратчайшего описания объекта). Исследование возникшего в рамках третьего подхода понятия колмогоровской сложности привело к созданию богатой теории, находящей применение в анализе программ, статистике и других разделах математики. Также были обнаружены многочисленные взаимосвязи между тремя подходами.

А. Шень[7] предложил использовать теоретико-информационные идеи для построения исчисления задач. В качестве задачи берётся произвольное множество конструктивных объектов, например, двоичных слов (содержательно это есть множество закодированных решений некоторой неформальной задачи). Операции над ними определяются так же, как и в случае реализуемости по Клини. Сложность множества есть минимум колмогоровских сложностей элементов (то есть сложность задачи есть сложность её простейшего решения). Каждая формула сопоставляет набору задач, подставляемых вместо переменных, новую, составную задачу. Рассмотрим те формулы, которым соответствуют „простые“ задачи, то есть такие формулы, что сложность составной задачи всегда гораздо меньше сложностей подставляемых задач. Возникает вопрос об описании класса всех таких формул. (Конечно, слова „гораздо меньше“ должны быть заменены некоторой конкретной оценкой.)

Можно сформулировать целый ряд подобных задач: заменив, например, множества двоичных слов (которые в диссертации называются алгоритмическими задачами) финитными задачами Медведева, или же ис-

[6] А. Н. Колмогоров. Три подхода к определению понятия „количество информации“. *Проблемы передачи информации*, 1965, т. 1, № 1, с. 3–11.

[7] A. Shen, N. Vereshchagin. Logical operations and Kolmogorov complexity. *Theoretical Computer Science*, v. 271, 2002, p. 125–129.

пользовать какие-то другие меры сложности. В диссертации исследуется несколько определений такого типа. Основным и довольно неожиданным результатом является то, что во всех изученных случаях получается один и тот же класс формул — хорошо известная логика слабого закона исключённого третьего $\mathfrak{J}$.

1.2. Цель работы

Для каждой пропозициональной формулы исследовать сложность соответствующих ей алгоритмических задач. Описать класс формул, которым соответствуют „простые“ алгоритмические задачи, при различных уточнениях слова „простые“.

Определить комбинаторную и алгоритмическую меры сложности для финитных задач. Для каждой пропозициональной формулы исследовать сложность соответствующих ей финитных задач. Описать класс формул, которым соответствуют „простые“ финитные задачи, при различных уточнениях слова „простые“.

1.3. Методы исследования

В диссертации использована следующая схема доказательства того, что задача, соответствующая данной формуле, не всегда является „простой“. Вначале делается переход от произвольных формул к формулам специального вида — критическим импликациям. Это позволяет сделать теорема 1.3, основанная на результатах Янкова и Медведева об интуиционистской выводимости позитивных формул. Затем при помощи комбинаторных рассуждений, обычных в теоремах о колмогоровской сложности, для критических импликаций строятся необходимые контрпримеры.

1.4. Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1) Показано, что класс формул, которым соответствуют „простые“ алгоритмические задачи, совпадает с логикой слабого закона исключённого третьего $\mathfrak{J}$ для любого уточнения слова „простые“.

2) Для алгоритмических задач найдена с точностью до аддитивной константы зависимость максимальной колмогоровской сложности задачи, соответствующей данной формуле, от величины, ограничивающей колмогоровскую сложность подставляемых задач.

3) Предложены две меры сложности финитной задачи — комбинаторная (логарифм минимальной мощности достаточного множества решений) и алгоритмическая (колмогоровская сложность финитной задачи).

4) Показано, что класс формул, которым соответствуют „простые“ финитные задачи, совпадает с логикой слабого закона исключённого третьего $\mathfrak{J}$ для широкого класса уточнений слова „простые“.

5) Для финитных задач найдена зависимость максимальной сложности задачи, соответствующей данной формуле, от величины, ограничивающей сложность подставляемых задач: в случае комбинаторной меры сложности — с точностью до мультипликативной константы, и в случае алгоритмической меры сложности — с точностью до аддитивной константы.

1.5. Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Её результаты и методы представляют научный интерес для занимающихся конструктивными семантиками и неклассическими логиками, в частности, вопросами реализуемости, а также для специалистов по теории сложности описаний. Результаты диссертации могут быть использованы сотрудниками Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института РАН им. В. А. Стеклова, Санкт-Петербургского

отделения математического института, Санкт-Петербургского государственного университета.

1.6. Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ: научно-исследовательском семинаре по математической логике и теории алгоритмов (руководители академик РАН профессор С. И. Адян и профессор В. А. Успенский), семинаре „Алгоритмические вопросы алгебры и логики“ (руководитель академик РАН профессор С. И. Адян) и Колмогоровском семинаре по сложности вычислений и сложности определений (руководители профессор Н. К. Верещагин, к.ф.-м.н. А. Е. Ромащенко, профессор А. Л. Семёнов, к.ф.-м.н. А. Шень); на научно-исследовательском семинаре лаборатории математической логики ПОМИ; а также на международных семинарах “2-nd Moscow–Vienna Workshop on Logic and Computation” (Москва, апрель 2002 г.), “Computability and Randomness” (Гейдельберг, Германия, апрель 2003 г.), “Centennial Seminar on Kolmogorov Complexity” (Дагштуль, Вадерн, Германия, апрель 2003 г.) и на международной конференции “Computer Science Logic 2002” (Эдинбург, Шотландия, сентябрь 2002 г.).

1.7. Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведён в конце автореферата.

1.8. Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трёх глав, разбитых на разделы. Общий объём работы составляет 93 страницы. Список литературы содержит 22 наименования.

2. Краткое содержание диссертации

Введение содержит некоторые исторические сведения и постановку задачи. Также во введении сформулированы основные результаты и описана структура диссертации.

Глава 1 „Предварительные сведения“ является вспомогательной. В ней приведены определения и некоторые свойства понятий, используемых в формулировках и доказательствах основных результатов диссертации.

Первый раздел главы посвящён логическим формулам и исчислениям. В параграфе 1.1.1 даны определения основных понятий. Здесь полезно привести одно определение, которое часто используется в тексте автореферата. *Критической импликацией* называется формула вида

$$J = \bigwedge_i \big((P_i \to Q_i) \to Q_i\big) \to R\,,$$

где P_i — непустые конъюнкции переменных, Q_i и R — непустые дизъюнкции переменных, причём при любом i формулы P_i и Q_i не имеют общих переменных. Понятие критической импликации было введено Медведевым[8] специально для анализа позитивных формул.

В параграфе 1.1.2 собраны некоторые свойства *логики слабого закона исключённого третьего* $\mathfrak{J}$. Эта логика получается из интуиционистского исчисления высказываний $\mathfrak{Int}$ добавлением аксиомы $\neg t \vee \neg\neg t$. Важную роль в доказательстве основных результатов диссертации играет следующее свойство логики $\mathfrak{J}$ (**теорема 1.1** в диссертации), обнаруженное Янковым[9]. Логика $\mathfrak{J}$ имеет интуиционистский позитивный фрагмент, то есть любая позитивная (не содержащая отрицания или константы $\bot$) формула, выводимая в $\mathfrak{J}$, выводится также в $\mathfrak{Int}$, и логика $\mathfrak{J}$ является наибольшей среди логик с интуиционистским позитивным фрагментом.

Параграф 1.1.3 посвящён выводимости позитивных формул в $\mathfrak{Int}$. Медведев сформулировал следующее утверждение (**теорема 1.2** в дис-

[8] Ю. Т. Медведев. Финитные задачи. *Доклады АН СССР*, т. 142, вып. 5, 1962, с. 1015–1018.

[9] В. А. Янков. Об исчислении слабого закона исключённого третьего. *Известия АН СССР*, сер. матем., т. 32, вып. 5, 1968, с. 1044–1051.

сертации): если позитивная формула Φ невыводима в $\mathfrak{Int}$, то в логике $(\mathfrak{Int} + \Phi)$ выводима некоторая критическая импликация J. Повторяя с некоторыми изменениями принадлежащее Скворцовым[10] доказательство теоремы Медведева и используя уже упомянутый результат Янкова, можно вывести следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть формула $\Phi(t_1, \ldots, t_k)$ невыводима в $\mathfrak{J}$. В этом случае можно эффективно найти такое натуральное число $m > 0$ и такие формулы $\mathrm{T}_1(s_1, \ldots, s_m), \ldots, \mathrm{T}_k(s_1, \ldots, s_m)$, что интуиционистски выводима импликация*

$$\Phi\big(\mathrm{T}_1(s_1, \ldots, s_m), \ldots, \mathrm{T}_k(s_1, \ldots, s_m)\big) \to J_m(s_1, \ldots, s_m)\,.$$

При этом можно считать, что если формула Φ позитивна, то все T_i имеют вид $s_m \vee \Upsilon(s_1, \ldots, s_m)$, где $\Upsilon(s_1, \ldots, s_m)$ есть некоторая дизъюнкция конъюнкций переменных, а если формула Φ непозитивна, то при каждом i формула T_i либо имеет указанный вид, либо является константой $\bot$.

Эта теорема позволяет вместо произвольных невыводимых в $\mathfrak{J}$ формул рассматривать только критические импликации. С использованием теоремы 1.3 доказываются основные утверждения диссертации о совпадении с логикой $\mathfrak{J}$ класса тех формул, которым соответствуют „простые“ задачи.

Второй раздел главы 1 состоит в основном из определений. В параграфе 1.2.1 введены некоторые обозначения, связанные с вычислимыми функциями. Параграф 1.2.2 посвящён понятию количества информации. В частности, в нём дано определение функции колмогоровской сложности K и сформулированы её простейшие свойства.

Глава 2 „Алгоритмические задачи“ посвящена подходу, основанному на идеях клиниевской реализуемости.

[10] Н. К. Верещагин, Д. П. Скворцов, Е. З. Скворцова, А. В. Чернов. Варианты понятия реализуемости для пропозициональных формул, приводящие к логике слабого закона исключённого третьего. *Математическая логика и алгебра*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2003, т. 242, с. 77–97.

Определения, а также простейшие утверждения, показывающие нетривиальность рассматриваемых понятий, приведены в разделе 2.1.

Алгоритмической задачей называется произвольное множество двоичных слов. Соответствующие логическим связкам операции над алгоритмическими задачами определяются следующим образом.

$$\begin{aligned} X \vee Y &= \{\langle 0, x\rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle 1, y\rangle \mid y \in Y\}\,, \\ X \wedge Y &= \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in Y\}\,, \\ X \to Y &= \{p \mid \forall x\,(x \in X \;\Rightarrow\; [p](x) \text{ определено и } [p](x) \in Y)\}\,, \\ \bot &= \varnothing \text{ и} \\ \neg X &= X \to \bot = X \to \varnothing\,. \end{aligned}$$

(Пары слов и вычислимые функции здесь занумерованы двоичными словами, $[p](x)$ означает результат применения функции с номером p к слову x.) По индукции для любых множеств $X_1, \ldots, X_k$ и любой формулы Φ определяется множество $\Phi(X_1, \ldots, X_k)$.

Сложностью $Ks(X)$ множества двоичных слов X называется минимум колмогоровских сложностей элементов этого множества: $Ks(X) = \min\{K(x) \mid x \in X\}$; сложность пустого множества бесконечно велика: $Ks(\varnothing) = \infty$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{L}_{\mathrm{K}}$ формул Φ, для которых найдётся такая константа C, что для любых множеств $X_1, \ldots, X_k$

$$Ks(\Phi(X_1, \ldots, X_k)) \leqslant C\,.$$

Отметим, что это множество можно определить и без использования сложности: формула Φ принадлежит множеству $\mathfrak{L}_{\mathrm{K}}$, если при некотором l найдутся такие слова $x_1, \ldots, x_l$, что для любых множеств $X_1, \ldots, X_k$

$$\exists i \in \{1, \ldots, l\} \quad x_i \in \Phi(X_1, \ldots, X_k)\,.$$

Если потребовать $l = 1$ и ограничиться арифметическими множествами $X_1, \ldots, X_k$, получится определение реализуемой формулы. Содержательно множество $\mathfrak{L}_{\mathrm{K}}$ состоит из тех формул, которым соответствуют „простые“ задачи.

Из следующей леммы вытекает, что $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathrm{K}}$.

Лемма 2.5. *По формуле* $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$, *выводимой в* $\mathfrak{J}$, *можно эффективно построить такие слова* $x_1,\ldots,x_l$, *где* $l \leqslant 2^k$, *что для любых множеств* $X_1,\ldots,X_k$

$$\exists i \in \{1,\ldots,l\} \quad x_i \in \Phi(X_1,\ldots,X_k)\,.$$

Для каждой формулы соотношение между сложностью задачи, соответствующей формуле, и сложностью подставленных задач характеризуется следующей функцией ka_Φ:

$$\mathrm{ka}_\Phi(n) = \max\Big\{ Ks\big(\Phi(X_1,\ldots,X_k)\big) \;\Big|\; (\exists i\; X_i \neq \varnothing) \;\Rightarrow\; Ks\Big(\bigwedge_{X_i\neq\varnothing} X_i\Big) \leqslant n \Big\}\,.$$

Наряду с логикой $\mathfrak{L}_\mathrm{K} = \{\Phi \mid \mathrm{ka}_\Phi(n) = O(1)\}$ естественно рассмотреть и другие логики, например, $\{\Phi \mid \mathrm{ka}_\Phi(n) = O(\log n)\}$, $\{\Phi \mid \mathrm{ka}_\Phi(n) = o(n)\}$.

В разделе 2.2 доказаны основные результаты о сложности алгоритмических задач.

Теорема 2.1. *Для любой критической импликации* $J(s_1,\ldots,s_m)$ *найдётся такая константа* C, *что для произвольных двоичных слов* $x_1,\ldots,x_m$ *имеет место неравенство*

$$Ks\big(J(\{x_1\},\ldots,\{x_m\})\big) \geqslant \min_j K(x_j|x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m) - C\,.$$

Применением теоремы 1.3 получается следующий общий результат.

Теорема 2.2. *Пусть формула* $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ *невыводима в логике* $\mathfrak{J}$. *Если при этом классически истинна формула* $\Phi(\bot,\ldots,\bot)$ (*вместо всех переменных подставлена логическая константа* $\bot$) *или формула* $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ *позитивна, то существует такая константа* C, *что для любого числа* n *найдутся конечные множества* $X_1,\ldots,X_k$ *со свойствами:*

1) *среди* $X_1,\ldots,X_k$ *есть непустые;*

2) $Ks\big(\bigwedge\limits_{X_i\neq\varnothing} X_i\big) \leqslant n + C$;

3) $Ks\big(\Phi(X_1,\ldots,X_k)\big) \geqslant n - C$.

Если формула $\Phi(t_1, \ldots, t_k)$ *позитивна, то можно выбрать непустыми* все *множества* $X_1, \ldots, X_k$.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает, что $\mathfrak{L}_{\mathrm{K}} = \mathfrak{J}$. Также отсюда следует, что и все прочие возможные логики рассматриваемого типа ($\{\Phi \mid \mathrm{ka}_\Phi(n) = O(\log n)\}$ и т. д.) совпадают с $\mathfrak{J}$.

Следствие 2.1.

Если формула Φ *не выводится в классической логике, то* $\mathrm{ka}_\Phi(n) = \infty$ *при достаточно больших* n.

Если формула Φ *выводится в* $\mathfrak{J}$, *то* $\mathrm{ka}_\Phi(n) = O(1)$.

Если формула Φ *не выводится в* $\mathfrak{J}$, *но выводится в классической логике, то* $\mathrm{ka}_\Phi(n) = n + O(1)$.

Параграф 2.2.3 посвящён следующей задаче[11]: для данной формулы $\Phi(t_1, \ldots, t_k)$ выразить сложность множества, полученного подстановкой в Φ одноэлементных множеств $\{x_1\}, \ldots, \{x_k\}$, через сложности слов $x_1, \ldots, x_k$ и их условные сложности относительно друг друга. В теореме 2.2 для критических импликаций эта величина оценена снизу. Оказывается, для многих критических импликаций эта оценка точна.

Теорема 2.3. *Пусть* $J(s_1, \ldots, s_m)$ — *критическая импликация,* $m \geqslant 2$. *Пусть число* l *таково, что если* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *и* $j \neq l$, *то среди посылок* J *есть формула* $\bigl((\bigwedge_{i \neq j} s_i) \to s_j\bigr) \to s_j$. *Тогда существует такая константа* C, *что для произвольных слов* $x_1, \ldots, x_m$ *верна оценка*

$$Ks\bigl(J(\{x_1\}, \ldots, \{x_m\})\bigr) \leqslant \\ \leqslant \min_{j \in V} K(x_j | x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) + 2 \log \max_j K(x_j) + C\,,$$

где V — *множество индексов тех переменных, которые входят в дизъюнкцию* R, *являющуюся заключением критической импликации* J.

[11] A. Shen, N. Vereshchagin. Logical operations and Kolmogorov complexity. *Theoretical Computer Science*, v. 271, 2002, p. 125–129.

В параграфе 2.2.4 рассмотрен вопрос о возможной мощности множеств, на которых достигается максимум из определения функции ka_Φ (именно такие множества построены в теореме 2.2). Показано, что всегда можно найти множества мощности не более $2^{2^{N(\Phi)+4k+1}+3}$, где $N(\Phi)$ — число всех подформул формулы Φ, а k — число переменных. Также для ряда критических импликаций показано, что указанные множества не могут быть одноэлементными, а двухэлементные множества можно подобрать всегда.

Глава 3 „Финитные задачи“ посвящена подходу, основанному на идеях Медведева.[12] В отличие от ранее рассмотренного алгоритмического подхода его можно назвать комбинаторным, поскольку здесь понятие вычислимости не участвует в определении операций.

В разделе 3.1 даны определения финитной задачи и операций над финитными задачами.

Финитной задачей называется пара множеств $\langle F, X\rangle$, где F — произвольное конечное непустое множество, а X — произвольное подмножество F (возможно, пустое или совпадающее со всем F). Множество F — *тип* задачи, а X — множество её решений. Для финитной задачи A её тип обозначается через $\varphi[A]$, а множество решений — через $\chi[A]$.

Для произвольных финитных задач $A_1 = \langle F_1, X_1\rangle$ и $A_2 = \langle F_2, X_2\rangle$ определим операции над финитными задачами, соответствующие логическим связкам.

$$\begin{aligned}
A_1 \wedge A_2 &= \langle F_1 \times F_2, X_1 \times X_2\rangle\,;\\
A_1 \vee A_2 &= \langle F_1 \sqcup F_2, X_1 \sqcup X_2\rangle\,;\\
A_1 \to A_2 &= \langle F_2^{F_1}, \{f \in F_2^{F_1} \mid \forall x\,(x \in X_1 \Rightarrow f(x) \in X_2)\}\rangle\,;\\
\bot &= \langle\{0\}, \varnothing\rangle\,,\\
\neg A_1 &= A_1 \to \bot\,.
\end{aligned}$$

(Здесь $X \sqcup Y = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$.) По индукции для любых финитных задач $A_1, \ldots, A_k$ и любой формулы Θ определяется финитная задача $\Theta(A_1, \ldots, A_k)$. Поскольку тип финитной задачи $\Theta(A_1, \ldots, A_k)$ зависит

[12] Ю. Т. Медведев. Финитные задачи. *Доклады АН СССР*, т. 142, вып. 5, 1962, с. 1015–1018.

только от типов финитных задач $A_1, \ldots, A_k$, удобно ввести операцию над типами $\varphi[\Theta]$:

$$\varphi[\Theta](\varphi[A_1], \ldots, \varphi[A_k]) = \varphi[\Theta(A_1, \ldots, A_k)]\,.$$

Для рассматриваемых здесь вопросов несущественна природа элементов, из которых состоит тип, а важны лишь мощности типов. Участвующие в определении операций множества $\{0\}$ и $\{1\}$ также могут быть заменены другими. (Точные формулировки соответствующих утверждений не приводятся в автореферате ввиду их громоздкости.)

В разделе 3.2 изучается следующая комбинаторная мера сложности финитных задач. Для формулы Θ и для произвольных типов $F_1, \ldots, F_k$ множество $X \subseteq \varphi[\Theta](F_1, \ldots, F_k)$ называется *достаточным множеством решений*, если для любых $X_1, \ldots, X_k$

$$X_1 \subseteq F_1, \ldots, X_k \subseteq F_k \quad \Rightarrow \quad X \cap \chi\big[\Theta(\langle F_1, X_1\rangle, \ldots, \langle F_k, X_k\rangle)\big] \neq \varnothing\,.$$

Минимальная мощность достаточного множества решений для формулы Θ зависит лишь от мощностей типов $F_1, \ldots, F_k$. Логарифм минимальной мощности достаточного множества решений естественно назвать комбинаторной сложностью задачи типа $\varphi[\Theta](F_1, \ldots, F_k)$.

По аналогии с логикой $\mathfrak{L}_{\mathrm{K}}$ для алгоритмических задач теперь определяется множество формул, для которых существует такая константа C, что для любых типов $F_1, \ldots, F_k$ есть достаточное множество решений мощности C. (Если потребовать $C = 1$, получится рассмотренное Медведевым понятие финитной общезначимости.) Следующее утверждение является аналогом леммы 2.5.

Лемма 3.8. *Пусть формула Θ содержит только переменные $t_1, \ldots, t_k$ и выводима в $\mathfrak{J}$. Тогда для любых типов $F_1, \ldots, F_k$ существует достаточное множество решений мощности не больше 2^k.*

Основные результаты раздела также аналогичны соответствующим утверждениям об алгоритмических задачах.

Теорема 3.2. *Пусть $J(s_1, \ldots, s_m)$ — произвольная критическая импликация, а $G_1, \ldots, G_m$ — произвольные конечные множества, содержащие*

по крайней мере два элемента. Пусть множество $X \subseteq \varphi[J](G_1, \ldots, G_m)$ *таково, что для любых множеств* $X_1, \ldots, X_m$

$$\forall i\ (X_i \subseteq G_i\ \&\ |X_i| = 2) \quad \Rightarrow \quad X \cap \chi\big[J(\langle G_1, X_1\rangle, \ldots, \langle G_m, X_m\rangle)\big] \neq \varnothing\,.$$

Тогда

$$|X| \geqslant \min_i |G_i|/(2m)\,.$$

(Отметим, что доказательство теоремы 3.2 существенно отличается от доказательства теоремы 2.1, несмотря на близость формулировок. Лемма 3.10 в диссертации поясняет, почему возникает это различие.)

Теорема 3.3. *Пусть формула* $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ *невыводима в* $\mathfrak{J}$. *Тогда найдётся такое* m, *что для любого числа* N *существуют такие типы* $F_1, \ldots, F_k$, *что их мощности не превышают* $(4mN)^m$ *и для любого множества* $X \subseteq \varphi[\Theta](F_1, \ldots, F_k)$ *выполнено следующее: если для любых множеств* $X_1, \ldots, X_k$

$$\forall i\ (X_i \subseteq F_i\ \&\ |X_i| \leqslant 4^m) \quad \Rightarrow \quad X \cap \chi[\Theta(\langle F_1, X_1\rangle, \ldots, \langle F_k, X_k\rangle)] \neq \varnothing\,,$$

то

$$|X| \geqslant N\,.$$

Следствие 3.1.

Если формула $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ *не выводится в классической логике, то достаточного множества решений не существует.*

Если формула $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ *выводится в* $\mathfrak{J}$, *то для любых типов* $F_1, \ldots, F_k$ *есть достаточное множество решений мощности не более* 2^k.

Если формула $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ *не выводится в* $\mathfrak{J}$, *но выводится в классической логике, то существует такая константа* m, *зависящая только от* Θ, *что для любого числа* M *существуют типы* $F_1, \ldots, F_k$, *для которых* $|F_1| \leqslant M, \ldots, |F_k| \leqslant M$ *и мощность любого достаточного множества решений больше или равна* $M^{1/m}/(4m)$.

При сравнении полученного результата с аналогичным утверждением для алгоритмических задач видно, что в третьем случае для алгоритмических задач сложности составной задачи и подставляемых задач равны (с точностью до аддитивной константы), а для финитных задач есть разрыв в константу раз.

В разделе 3.3 вводится понятие колмогоровской сложности финитной задачи. Теперь рассматриваются только задачи, типы которых являются конечными непустыми множествами конструктивных объектов.

Колмогоровской сложностью финитной задачи $\langle F, X\rangle$ назовём величину

$$Kf(\langle F, X\rangle) = \min_{x\in X} K(x|F)$$

(если $X = \varnothing$, то $Kf(\langle F, X\rangle) = \infty$).

Лемма 3.12. *Если формула $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ выводима в $\mathfrak{J}$, то найдётся такая константа C, что для любых финитных задач $A_1, \ldots, A_k$*

$$Kf\big(\Theta(A_1, \ldots, A_k)\big) \leqslant C\,.$$

Теорема 3.4. *Пусть формула $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ невыводима в логике $\mathfrak{J}$. Если при этом классически истинна формула $\Theta(\bot, \ldots, \bot)$ (вместо всех переменных подставлена логическая константа $\bot$) или формула $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ позитивна, то существует такая константа C, что для любого числа n найдутся финитные задачи $A_1, \ldots, A_k$ со свойствами:*

1) среди множеств $\chi[A_1], \ldots, \chi[A_k]$ есть непустые;

2) $Kf\Big(\bigwedge\limits_{\chi[A_i]\neq\varnothing} A_i\Big) \leqslant n + C$;

3) $Kf\big(\Theta(A_1, \ldots, A_k)\big) \geqslant n - C$.

Если формула $\Theta(t_1, \ldots, t_k)$ позитивна, то можно выбрать финитные задачи $A_1, \ldots, A_k$ так, что все множества $\chi[A_1], \ldots, \chi[A_k]$ непусты.

Теорема 3.4 фактически переносит утверждение теоремы 2.2 на случай финитных задач. Введя функцию

$$\mathrm{kf}_\Theta(n) = \max\Big\{ Kf(\Theta(A_1,\ldots,A_k)) \;\Big|\; (\exists i\, \chi[A_i] \neq \varnothing) \;\Rightarrow\; Kf\Big(\bigwedge_{\chi[A_i]\neq\varnothing} A_i\Big) \leqslant n \Big\},$$

для финитных задач получаем дословно ту же классификацию, что и для алгоритмических (следствие 2.1).

Следствие 3.2.

Если формула Θ *не выводится в классической логике, то* $\mathrm{kf}_\Theta(n) = \infty$ *при достаточно больших* n.

Если формула Θ *выводится в* $\mathfrak{J}$, *то* $\mathrm{kf}_\Theta(n) = O(1)$.

Если формула Θ *не выводится в* $\mathfrak{J}$, *но выводится в классической логике, то* $\mathrm{kf}_\Theta(n) = n + O(1)$.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Николаю Константиновичу Верещагину за постановку задачи и последующее постоянное участие и помощь в работе. Автор благодарит Александра Шеня, Валерия Егоровича Плиско и особенно Дмитрия Павловича Скворцова за полезные обсуждения. Автор признателен Владимиру Андреевичу Успенскому, Сергею Ивановичу Адяну и всем сотрудникам кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ за благожелательное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Верещагин Н. К., Скворцов Д. П., Скворцова Е. З., Чернов А. В. Варианты понятия реализуемости для пропозициональных формул, приводящие к логике слабого закона исключённого третьего. *Математическая логика и алгебра*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2003, т. 242, с. 77–97.

Чернову А. В. в статье принадлежат следующие результаты: теорема 3 (о слабой абсолютной реализуемости), теорема 4 (о варианте слабой реализуемости для конечных множеств), теорема 8 (о связи логики слабого исключённого третьего и слабой реализуемости), лемма 5 (о слабой реализуемости некоторых конкретных формул), а также неравенства для сложностей множеств, порождённых формулами.

[2] Чернов А. В. Финитные задачи и логика слабого закона исключённого третьего. Деп. в ВИНИТИ 03.07.2003, № 1263-В2003, 15 с.

[3] Chernov A. V., Skvortsov D. P., Skvortsova E. Z., Vereshchagin N. K. Variants of Realizability for Propositional Formulas and the Logic of the Weak Law of Excluded Middle. *Proceedings of Computer Science Logic'02*, Lecture Notes in Computer Science, 2002, v. 2471, pp. 74–88.

Чернову А. В. в статье принадлежат следующие результаты: Theorem 3 (об абсолютном варианте слабой реализуемости), Theorem 4 (о слабой реализуемости при подстановках конечных множеств), Theorem 8 (о связи логики слабого исключённого третьего и слабой реализуемости), Lemma 1 (о слабой реализуемости некоторых конкретных формул).