第41卷第4期 数 学 学 报 Vol.41, No. 4
1998年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA July, 1998

一类完全正则半群簇子簇格的性质

杨海宣

(兰州大学数学系 兰州 730000)

摘 要 本文研究了完全正则半群簇的子簇格 $[\underline{V^+\cap PV}, V^+\cap PV]$ 的某些格运算性质，我们证明了簇 $V^+\cap PV$ 可分解为 V 与 $\underline{V^+\cap PV}$ 的并；对任意完全正则半群簇 W, 有 $W\cap(V\vee\underline{V^+\cap PV})=(W\cap V)\vee(W\cap\underline{V^+\cap PV})$. 特别地，我们得到了等式 $V^+\cap PV=V$ 成立的若干条件.

关键词 完全正则半群簇，格
MR(1991) 主题分类 20M07
中图分类 O152.7

Properties of a Class of Lattice of Subvarieties of Variety of Completely Regular Semigroups

Yang Haixuan
(*Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *China*)

Abstract In this paper, some lattice-theoretical properties of the lattice $[\underline{V^+\cap PV}, V^+\cap PV]$ are studied. It is proved that $V^+\cap PV$ is the join of V and $\underline{V^+\cap PV}$ and $W\cap(V\vee\underline{V^+\cap PV})=(W\cap V)\vee(W\cap\underline{V^+\cap PV})$ for all varieties W, V of completely regular semigroups. In particular, some conditions for the equation $V^+\cap PV=V$ to be true are obtained.

Keywords Variety of completely regular semigroups, Lattice
MR(1991) Subject Classification 20M07
Chinese Library Classification O152.7

1 引言和预备结果

半群 S 称为完全正则的，若 S 是群的并. 所有的完全正则半群类 CR 可以看作是具有一个二元运算 "·" 及一个一元运算 $(\ )^{-1}$ 的由下列恒等式定义的代数簇：

$$x(yz)=(xy)z,\quad x=xx^{-1}x,\quad (x^{-1})^{-1}=x,\quad xx^{-1}=x^{-1}x$$

CR 的所有子簇按包含关系构成完全格 $\mathcal{L}(CR)$.

本文采用如下记号：

$\tau(\mu)$: 最大幂等元纯 (分离) 同余， ϵ: 恒等同余， T: 平凡半群簇， SL: 半格簇， CS: 完全单半群簇， O: 纯正的完全正则半群簇， NBG: 群的正规带簇， BG: 群的带簇， $E(S)$: 半

收稿日期： 1995-06-29, 修改日期： 1997-05-12, 接受日期： 1997-09-29
国家自然科学基金资助项目
作者现工作单位：天津商学院数理系，天津 300400

群 S 的幂等元集合， $[u_\alpha = v_\alpha, \alpha \in A]$: 由等式 $u_\alpha = v_\alpha$ $(\alpha \in A)$ 刻划的完全正则半群簇.

若 $S \in CR$, $a_i \in S$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ 表示由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 生成的完全正则子半群. u^0 表示 $uu^{-1} = u^{-1}u$.

在完全正则半群簇的研究中 (见 [1–4]), 经常用到格 $\mathcal{L}(CR)$ 上的算子 $\overline{(\ )}$, $\underline{(\ )}$, $(\ )^+$, P:

$$\overline{V} = \{S \in CR : S/\tau \in V \vee SL\}, \quad \underline{V} = \bigcap_{\overline{W} = \overline{V}} W,$$
$$V^+ = \{S \in CR : S/\mu \in V\}, \quad PV = \{S \in CR : eSe \in V,\ \forall e \in E(S)\}$$

格 L 上的算子 $x \to x^*$ 称为上 (下) 闭算子，如果 $x \leq y \Rightarrow x^* \leq y^*$, $x \leq x^*(x \geq x^*)$, $(x^*)^* = x^*(x, y \in L)$.

算子 $\overline{(\ )}$ 是格 $\mathcal{L}(CR)$ 的上闭算子 [1, 定理 1]; 易于证明 $\underline{(\ )}$ 是 $\mathcal{L}(CR)$ 的下闭算子，且对任意 $V \in \mathcal{L}(CR)$, 有 $\overline{(\underline{V})} = \overline{V}$, $\underline{(\overline{V})} = \underline{V}$; $(\ )^+$ 是 $\mathcal{L}(CR)$ 的上闭算子 [2, 定理 3.2]; P 是 $\mathcal{L}(CR)$ 的上闭算子 [3, 命题 4.1].

我们将用到下面的几个引理.

引理 1 [1, 引理 4] 设 $W \in \mathcal{L}(CR)$, 则 $SL \subseteq W$ 当且仅当 $W \not\subseteq CS$.

用簇的定义及其刻划，易于证明

引理 2 设 $V_1, V_2 \in \mathcal{L}(CR)$, 则 $V_1 \vee V_2 = \{S$: 存在 $S_1 \in V_1$, $S_2 \in V_2$, $S_1 \times S_2$ 的一个完全正则子半群 R 和一个满同态 $\varphi : R \to S\}$.

引理 3 设 $V \in \mathcal{L}(CR)$. 若 $S \in CS$, 且 $S \in V \vee SL$, 则 $S \in V$.

证明 当 $SL \subseteq V$ 时，结论显然. 当 $SL \not\subseteq V$ 时，由引理 1 知 $V \subseteq CS$. 再由引理 2 知，存在 $Y \in SL, T \in V$, $Y \times T$ 的一个完全正则子半群 R, 和一个满同态 $\varphi : R \to S$. $Y \times T$ 有完全单分支 $\{\alpha\} \times T$, 对 $\alpha \in Y$. 这样 $R = (Z; R_\alpha)$, 其中 Z 是 Y 的子半格， R_α 是 $\{\alpha\} \times T$ 的完全单子半群，因而 $R_\alpha \in V$. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in S$, 令 $b_i \in R$, $a_i = b_i\varphi$, $e_i = (b_i b_1 b_2 \cdots b_n b_i)^0$, $c_i = e_i b_i e_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 必存在 $\alpha \in Z$, 使 $c_i \in R_\alpha$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因而有 $\langle c_1, c_2, \cdots, c_n \rangle \subseteq R_\alpha \in V$, 所以 $\langle c_1, c_2, \cdots, c_n \rangle \in V$. 又因为 $e_i\varphi = (a_i a_1 a_2 \cdots a_n a_i)^0 = a_i^0$, 因而 $c_i\varphi = (e_i b_i e_i)\varphi = a_i^0 a_i a_i^0 = a_i$, 所以 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle = \langle c_1, c_2, \cdots, c_n \rangle\varphi \in V$.

上面证明了 S 的每一个有限生成的完全正则子半群属于 V, 因而 $S \in V$.

引理 4 [4, 定理 18] $\mathcal{L}(CR)$ 是模格.

引理 5 设 $W, V \in \mathcal{L}(CR)$, 则

$$W \cap (V \vee SL) = \begin{cases} W \cap V, & SL \subseteq V, \\ W \cap V, & SL \not\subseteq V,\ SL \not\subseteq W, \\ (W \cap V) \vee SL, & SL \not\subseteq V,\ SL \subseteq W. \end{cases}$$

证明 当 $SL \subseteq V$ 时，结论显然成立；当 $SL \not\subseteq V$, $SL \not\subseteq W$ 时，由引理 1 知 $V, W \subseteq CS$. 显然有 $W \cap V \subseteq W \cap (V \vee SL)$. 反过来，若 $S \in W \cap (V \vee SL)$, 则由引理 3 知 $S \in W \cap V$, 因而结论成立；当 $SL \not\subseteq V$, $SL \subseteq W$ 时，由引理 4 知结论成立.

引理 6 [2, 定理 3.9] 设 $V = [u_\alpha = v_\alpha, \alpha \in A]$, 则 $V^+ = \left[u_\alpha^0 = v_\alpha^0, (xu_\alpha y)^0 = (xv_\alpha y)^0, \alpha \in A\right]$.

引理 7 [5, 定理 2.4] 设 $V = [u_\alpha = v_\alpha, \alpha \in A]$, 则 $\overline{V} = [e_\alpha x_\alpha u_\alpha x_\alpha e_\alpha = e_\alpha x_\alpha v_\alpha x_\alpha e_\alpha$, $\alpha \in A$, 其中 $x_\alpha \notin E(u_\alpha) \cup E(v_\alpha) \subseteq E(e_\alpha)$, $\alpha \in A]$. $E(u_\alpha), E(v_\alpha), E(e_\alpha)$ 分别表示 $u_\alpha, v_\alpha, e_\alpha$ 中含的变元的集合， x_α 是一个变元.

引理 8 [6, 定理 6.2] 设 $V \in \mathcal{L}(CR)$, 则 $P(\overline{V}) = \overline{PV}$.

2 主要结论及其证明

定理 1 设 $V, W \in \mathcal{L}(CR)$. 若 $\underline{V^+ \cap PV} \subseteq W \subseteq V^+ \cap PV$, 则 $V \vee W = V^+ \cap PV$.

证明 只需证 $V^+ \cap PV \subseteq V \vee W$. 设 $S \in V^+ \cap PV$, 则 $S/\tau \in \underline{V^+ \cap PV} \vee SL \subseteq W \vee SL$, $S/\mu \in V$. 由于 $\tau \cap \mu = \epsilon$, 因而 S 是 S/τ 与 S/μ 的次直积，因而 $S \in V \vee W \vee SL$.

我们分两种情况讨论：

(i) 若 $SL \subseteq V$, 则 $S \in V \vee W \vee SL = V \vee W$;

(ii) 若 $SL \not\subseteq V$, 则由引理 1 知 $V \subseteq CS$, 因而 $V^+ \subseteq CS$, $PV \subseteq CS$, 因而 $S \in CS$, 再由引理 3 知 $S \in V \vee W$. 证毕.

$\mathcal{L}(CR)$ 不是分配格，等式 $W \cap (V_1 \vee V_2) = (W \cap V_1) \vee (W \cap V_2)$ 一般不成立，但有

定理 2 设 $W, V \in \mathcal{L}(CR)$, 则有 $W \cap (V \vee \underline{V^+ \cap PV}) = (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$.

证明 只需证 $W \cap (V \vee \underline{V^+ \cap PV}) \subseteq (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$. 若 $S \in W \cap (V \vee \underline{V^+ \cap PV})$, 由定理 1 知 $S \in V^+ \cap PV$, 因而 $S/\mu \in V \cap W$, $S/\tau \in \underline{V^+ \cap PV} \vee SL$, 由于 $\tau \cap \mu = \epsilon$, 所以 S 是 S/τ 与 S/μ 的次直积，因而 $S \in (W \cap V) \vee [W \cap (\underline{V^+ \cap PV} \vee SL)]$.

分以下情况讨论：

(i) 若 $SL \subseteq \underline{V^+ \cap PV}$, 则显然 $S \in (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$;

(ii) 若 $SL \not\subseteq \underline{V^+ \cap PV}$, $SL \not\subseteq W$, 则由引理 5 及引理 3 知 $S \in (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$;

(iii) 若 $SL \not\subseteq \underline{V^+ \cap PV}$, $SL \subseteq W$, $SL \subseteq V$, 则由引理 5 知 $S \in (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV}) \vee SL = (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$;

(iv) 若 $SL \not\subseteq \underline{V^+ \cap PV}$, $SL \subseteq W$, $SL \not\subseteq V$, 则由引理 5 知 $S \in (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV}) \vee SL$. 再由引理 1 知 $V \subseteq CS$, 因而 $V^+ \subseteq CS$, $PV \subseteq CS$, 于是 $V^+ \cap PV \subseteq CS$, 因而 $S \in CS$, 再由引理 3 知 $S \in (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$.

综上所述，有 $W \cap (V \vee \underline{V^+ \cap PV}) = (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$.

定理 3 设 $V, W \in \mathcal{L}(CR)$, 则有

$$(W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV}) = (W \cap V)^+ \cap \overline{(W \cap V^+ \cap PV)}.$$

证明 显然有 $W \cap V \subseteq (W \cap V)^+ \cap \overline{(W \cap V^+ \cap PV)}$, 显然有 $W \cap \underline{V^+ \cap PV} \subseteq \overline{(W \cap V^+ \cap PV)}$, $W \cap \underline{V^+ \cap PV} \subseteq W \cap V^+ \cap PV \subseteq W \cap V^+ \subseteq (W \cap V)^+$, 因而 $W \cap \underline{V^+ \cap PV} \subseteq (W \cap V)^+ \cap \overline{(W \cap V^+ \cap PV)}$. 所以 $(W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV}) \subseteq (W \cap V)^+ \cap \overline{(W \cap V^+ \cap PV)}$.

反过来，若 $S \in (W \cap V)^+ \cap \overline{(W \cap V^+ \cap PV)} = (W \cap V)^+ \cap \overline{W} \cap \overline{V^+ \cap PV}$, 则 $S/\mu \in W \cap V$, $S/\tau \in (W \vee SL) \cap (\underline{V^+ \cap PV} \vee SL)$. 由于 $\tau \cap \mu = \epsilon$, 所以 S 是 S/τ 与 s/μ 的次直积，因而 $S \in (W \cap V) \vee [(W \vee SL) \cap (\underline{V^+ \cap PV} \vee SL)] = (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV}) \vee SL$ (反复用引理 5).

我们分以下情况讨论：

(i) 当 $SL \subseteq W$, $SL \subseteq V$, 因而 $SL \subseteq W \cap V$, 因而 $S \in (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$;

(ii) 当 $SL \not\subseteq W$ 或 $SL \not\subseteq V$ 时，由引理 1 知 $W \subseteq CS$ 或 $V \subseteq CS$, 不论哪种情况，均有 $W \cap V \subseteq CS$, 因而 $(W \cap V)^+ \subseteq CS$, 因而 $S \in CS$, 再由引理 3 知 $S \in (W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV})$.

综上所述，知 $(W \cap V) \vee (W \cap \underline{V^+ \cap PV}) = (W \cap V)^+ \cap \overline{(W \cap V^+ \cap PV)}$.

若 $W \subseteq V^+ \cap PV$, 由定理 1, 定理 2 和定理 3 知 $W = W \cap (V^+ \cap PV) = W \cap (V \vee \underline{V^+ \cap PV}) = (W \cap V)^+ \cap (W \cap \underline{V^+ \cap PV}) = (W \cap V)^+ \cap \overline{(W \cap \underline{V^+ \cap PV})}$. 再由引理 6 和引理 7, 有

定理 4 若 $W \subseteq V^+ \cap PV$, 且 $W \cap V = [u_\alpha = v_\alpha, \alpha \in A]$, $W \cap \underline{V^+ \cap PV} = [s_\beta = t_\beta, \beta \in B]$, 则 $W = [u_\alpha^0 = v_\alpha^0, (xu_\alpha y)^0 = (xv_\alpha y)^0,\ \alpha \in A;\ e_\beta x_\beta s_\beta x_\beta e_\beta = e_\beta x_\beta t_\beta x_\beta e_\beta$, 其中 $x_\beta \notin E(s_\beta) \cup E(t_\beta) \subseteq E(e_\beta),\ \beta \in B]$.

易见 [2] 中的结论可看作是本节的一个特例 (令 $V = O$).

3 推论

用与定理 2 的证明相同的办法, 可得

推论 1 设 $W, V, W_1 \in \mathcal{L}(CR)$. 若 $\underline{V^+ \cap PV} \subseteq W_1 \subseteq V^+ \cap PV$, 则 $W \cap (V \vee W_1) = (W \cap V) \vee (W \cap W_1)$.

由定理 1, 有

推论 2 等式 $V = V^+ \cap PV$ 成立的充要条件是 $V \supseteq \underline{V^+ \cap PV}$.

推论 3 若 $P(\overline{V}) = \overline{V}$, 则 $V = V^+ \cap PV$.

证明 由条件和引理 8, 有 $\overline{V^+ \cap PV} = \overline{V^+} \cap P(\overline{V}) = \overline{V^+} \cap \overline{V} = \overline{V}$. 因而 $V \supseteq \underline{V} = \underline{V^+ \cap PV}$, 再由推论 2 知 $V = V^+ \cap PV$.

[2] 中得到结果: 若 $NBG \subseteq V \subseteq PO$, 则 $V = V^+ \cap PV$. 我们注意到若 $NBG \subseteq V \subseteq PO$, 则 $\overline{V} = PO$, 满足条件 $P(\overline{V}) = PPO = PO = \overline{V}$, 因而推论 3 推广了 [2] 中的这个结果.

在 [1] 中, 有 $\overline{T} = B$ (B 为带簇), $\overline{CS} = PO$. 在 [3] 中, 有 $P(BG) = BG$. 这些事实和推论 3 可得下面的几个推论.

推论 4 若 $V \subseteq B$, 则 $V = V^+ \cap PV$.

推论 5 若 $CS \subseteq V \subseteq PO$, 则 $V = V^+ \cap PV$.

推论 6 若 $BG \subseteq V \subseteq \overline{BG}$, 则 $V = V^+ \cap PV$.

致谢 感谢郭聿琦教授的悉心指导.

参 考 文 献

1 Polák L. On varieties of completely regular semigroups I. Semigroup Forum, 1985, 32: 97–123
2 Reilly N R. Varieties of completely regular semigroups. J Austral Math Soc, (Series A), 1985, 38: 372–393
3 Hall T E, Jones P R. On the lattice of varieties of bands of groups. Pacific J Math, 1980, 91: 327–337
4 Pastjin F. The lattice of completely regular semigroups varieties. J Austral Math Soc, (Series A), 1990, 49: 24–42
5 Polák L. On varieties of completely regular semigroups II. Semigroup Forum, 1987, 36: 253–284
6 Polák L. On varieties of completely regular semigroups III. Semigroup Forum, 1988, 37: 1–30