

На правах рукописи

**“Стьюдент”  
Статистическая биография Уильяма Сийли Госсета**

по материалам Э. Ш. Пирсона

редактор и автор добавлений Р. Л. Плакетт  
при участии Г. А. Барнарда

Перевод О. Б. Шейнина

Берлин

2015

“Student”  
A Statistical Biography of William Sealy Gosset

Based on writings by E. S. Pearson

Edited and augmented by R. L. Plackett  
With the assistance of G. A. Barnard

Clarendon Press, Oxford  
1990

## Оглавление

**От переводчика**

**Предисловие**

**1. Введение**

**2. Общий фон**

2.1. Введение

2.2. Сочетание наблюдений

2.3. Биометрия

2.4. Книги, которыми пользовался Госсет

2.5. Лекции К. Пирсона

**3. Уильям Сийли Госсет**

3.1. Введение

3.2. Ранняя статистическая карьера

3.3. Переписка

3.4. Профессиональная деятельность

3.5. Характер и личность

**4. Карл Пирсон**

4.1. Введение

4.2. Корреляция

4.3. Временные ряды

4.4. Дискретные распределения

4.5. Комментарии и критика

**5. Рональд Эймлер Фишер**

5.1. Введение

5.2. Функция распределения  $t$

5.3. *Статистические методы для исследователей*

5.4. Планирование эксперимента

5.5. Совет и довод

**6. Эгон Шарп Пирсон**

6.1. Историческое введение, написанное им самим

6.2. Трудности с  $z$  и  $\chi^2$

6.3. Порядковые статистики и размах

6.4. Случайные числа и выборочные эксперименты

6.5. Обзор книги Фишера (§ 5.3)

6.6. Влияние не-нормальности

6.7. Расхождения о критерии  $z$  и о планировании экспериментов

6.8. Окончательные комментарии Э. Пирсона

**7. Общий комментарий**

**Примечания**

**Библиография**



### От переводчика

Уильям Сийли Госсет (*Стьюдент*) знаком русскоязычным читателям в основном лишь по своей действительно существенной статье (1908а), в которой он кроме того доказал теорему (*Стьюдента – Фишера*) о независимости выборочных параметров нормального распределения. Ниже описывается его вклад в математическую статистику и, в частности, в приложение статистики к планированию экспериментов и влияние его взаимоотношений с ведущими английскими статистиками его времени (Карлом Пирсоном, Фишером, Эгоном Пирсоном) на их труды. Возникновение математической статистики (главным образом) из биометрии трудно представить без его трудов и переписки. *Он был одним из пионеров развития современного статистического метода и его приложения к планированию и исследованию экспериментов* (Irwin 1978, p. 409).

Редакторы материала, собранного тогда уже покойным Э. Пирсоном, проделали немалую работу, и всё-таки книга оказалась черновиком желательного текста. Фразы подчас малопонятны, обозначения не всегда пояснены, а библиографическое оформление совсем скверное, и можно пожалеть, что не был составлен список публикаций Госсета. Редакторский текст местами небрежен, в нём было слишком много пассивных оборотов (которые английский язык плохо переносит), а выдержки из многочисленных писем следуют за основным текстом без всяких вводных слов и даже без двоеточий. Кроме того, редакторы (как и математики и даже математические статистики вообще) совершенно не владели теорией ошибок и допустили в этой области грубейшие ошибки.

Особо заметим, что в классической теории ошибок существовала ныне забытая детерминированная ветвь, которая исследовала измерения и их обработку при заданном порядке погрешностей (Шейнин 2007, §§ 0.1 и 0.2 и гл. 9). Результаты, полученные в этой ветви теории ошибок, могли бы принести пользу статистикам конца XIX и начала XX в., которые о ней и слыхом не слыхали.

Мы смогли многое улучшить, но предлагаемая книга осталась по существу черновым вариантом несуществующего текста. К тому же, наших знаний математической статистики не всегда хватало и мы иногда сохраняли английские выражения или фразы.

И в наших примечаниях, и здесь ниже мы ссылаемся на дополнительные источники. За исключением указанной ниже литературы, относящейся к России, мы вписали их в единую Библиографию, притом дополнительно включили в неё несколько книг и статей.

Вкратце опишем связи В. И. Романовского с К. Пирсоном и Р. Э. Фишером (Шейнин 2008b). Боголюбов и Матвиевская (1997) описали его жизнь и творчество и, в частности, на с. 85 упомянули о его личном знакомстве с Карлом Пирсоном (что, к сожалению, не отражено в сохранившихся письмах) и Фишером. Вот особое место в его письме Фишеру 28 октября 1929 г. № 11 из Парижа:

*ГПУ – самое ужасное и влиятельное утверждение в России, может арестовать меня. Моя попытка помочь эмигранту, хоть в моих действиях [...] только желание помочь [...], с точки зрения этого учреждения является преступлением и очень тяжёлым.*

Связи Романовского с зарубежными коллегами отнюдь не ограничивались перепиской. В Европе вышел в свет ряд его важных статей; одна из них (1928) послужила отправной точкой для исследований Э. Ш. Пирсона и Ю. Неймана.

В 1939 г. Среднеазиатский государственный университет (Ташкент), в котором и работал Романовский с его основания в 1918 г. до своей смерти, опубликовал по случаю его юбилея статьи многих виднейших отечественных и зарубежных математиков и статистиков.

Романовский пропагандировал работы английских статистиков и даже назвал Пирсона *нашим знаменитым современником* (1924, № 4/6, с. 12), а впоследствии написал четыре рецензии на сочинения Фишера. Его книгу (1925с) он назвал *замечательным явлением* и отметил, что она уже была переведена и издана на правах рукописи в небольшом числе экземпляров (см. Письмо № 28), однако полноправное русское издание появилось лишь в 1958 г., притом с критическим комментарием издательства на с. 5. Там Фишеру приписывались *буржуазная узость и формализм во взглядах*, игнорирование качественной стороны социальных явлений и т. п. Романовский описал и *новейшие* методы приложения статистики в полевых опытах, а вскоре сообщил о новой книге Фишера (1935) и заявил, что она *заслуживает величайшего внимания*. И тем не менее книга не была переведена. Наконец, Романовский описал статистические таблицы Фишера и Йейтса (1938). Отметив их ценность, он всё-таки указал, что их следовало бы перевести в переработанном и дополненном виде. Этого, однако, также не произошло.

Примерно с 1927 г. обстановка в статистике резко ухудшилась, и, в частности, сослаться на Пирсона в положительном смысле стало опасно. Даже Фишер, видимо, оказался под подозрением. В редакционном примечании к статье Романовского (1927, с. 224) было заявлено, что

*Редакция не разделяет ни основных предпосылок построения Фишера, принадлежащего к англо-американской школе эмпириков, ни отношения к этому построению автора настоящей статьи ...*

Но и позже Романовский (1938, с. 17) назвал Пирсона главой современной математической статистики, и через 10 лет ему пришлось признать свои *идеологические ошибки, допущенные в некоторых ранних работах* (Совещание 1948, с. 314).

Всё указанное выше следует воспринимать на фоне общей обстановки в стране (Шейнин 2001).

#### **Краткая библиография дополнительных источников по России**

**Ковальский А. Г.** (1924), Основы теории выборочного метода. *Уч. зап. Саратовск. унив.*, факультет хозяйства и права, т. 2, № 4, с. 60 – 138.

**Никулин М. С.** (1986), О результате Л. Н. Большева в проверке статистических гипотез. *Зап. научн. семинара Математич. инст. им. Стеклова*, 153, с. 129 – 137. Этот результат не был опубликован.

**Романовский В. И.** (1947), *Применение математической статистики в опытном деле*. М. – Л.

**Слуцкий Е. Е.** (1935), Статистический эксперимент как метод исследования. *Ж. геофиз.*, т. 5, № 1, с. 18 – 28.

**Rao C. R.** (2000), R. A. Fisher: the founder of modern statistics. In Rao, Editor, *Statistics for the 21<sup>st</sup> Century*. New York.

**Seneta E.** (1985), Sketch of the history of survey sampling in Russia. *JRSS*, vol. A148, pt. 2, pp. 118 – 125.

**Zarkovic S. S.** (1956 – 1962), Note on the history of sampling methods in Russia. *JRSS*, vol. A119, pp. 336 – 338; A125, pp. 580 – 582. Reprint: Kendall Sir Maurice & Plackett R. L. (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, pp. 482 – 488.

### Предисловие

“Стьюдент” был псевдонимом Уильяма Сийли Госсета, которым он подписывал свои научные работы. Всю свою трудовую жизнь он был пивоваром в фирме, которая в то время называлась Arthur Guinness, Son & Co, но его публикации, появившиеся в течение более 30 лет начала XX в., и его дружба с другими пионерами статистики сильно повлияли на её практические приложения к промышленности и сельскому хозяйству. Представленный здесь отчёт о его сочинениях и переписке составлен на основе записей хорошо знавшего его Эгона Шарпа Пирсона.

В 1937 г., после смерти Госсета, он опубликовал очерк (1939) о нём, а в конце жизни, в 1980 г., составил машинописный комментарий к своей более ранней переписке с ним и со своим отцом, Карлом Пирсоном. Мы стремились собрать и отредактировать весь этот материал, чтобы представить взвешенную биографию этого выдающегося статистика, чья привлекательная личность проявлялась во всех его поступках.

### Признательность

[...] Библиотека Университетского колледжа Лондон хранит архив К. Пирсона, №№ 525 и 704. Переписка Э. Пирсона и Госсета находится в оригинале у Сары Пирсон, дочери Э. Пирсона.





## 1. Введение

Эгон Шарп Пирсон займёт прочное место в любом очерке о развитии статистической методологии в XX в. С 1925 по 1938 г. его сотрудничество с Нейманом привело к появлению их теории проверки гипотез. Продолжающаяся значимость этой характерной черты статистических выводов во многом обязана его интересам к связям между теорией и практикой, которые проявляются и в его редактировании статистических таблиц. В 1933 г. его восторженный интерес к [статистическому] контролю качества в промышленности побудил Королевское статистическое общество учредить секцию промышленных и сельскохозяйственных исследований и во время войны в сильнейшей степени способствовал введению контрольных карт.

С 1936 по 1966 г. он был редактором-распорядителем *Биометрики*, и его осознанное редактирование и любезные советы авторам неизмеримо содействовали развитию статистики как научной дисциплины. Многие полученные им награды свидетельствуют о всеобщем уважении к нему. Но Эгон Пирсон был и заслуженным статистиком, и выдающимся историком статистики. Его работы в этой области, которым способствовал исключительный охват знаний и опыта, характеризовались ясным стилем, лишённым полемики, и были пропитаны глубоким пониманием потока идей.

Эта сторона научной деятельности Э. П. впервые проявилась в 1938 – 1939 гг., когда происшедшие события [смерти] привели его к составлению биографий отца и Госсета (1938; 1939). С 1955 г. в *Биометрике* начала появляться серия очерков по истории теории вероятностей и статистики, в которой он и другие авторы исследовали примечательно разнообразные темы. Эти очерки, вместе с предшествовавшими [историческими] статьями Карла Пирсона, были опубликованы в 1970 г. [E. S. Pearson & Kendall 1970].

В 1975 г. Э. П. отказался от редактирования *Дополнительных публикаций* журнала и позднее выпустил отредактированный вариант лекций своего отца (Karl Pearson 1978), которые тот прочёл в 1921 – 1933 гг. в Университетском колледже Лондона. Перед смертью в 1980 г. Э. П. собирал материалы для того, что он назвал *magnum opus* (основной труд). У него было около 40 писем своей переписки с Госсетом и примерно столько же писем Госсета к Карлу Пирсону. Приводя их в порядок, он неизбежно начал их комментировать и сводить воедино многие обстоятельства. Свою комментированную переписку с Госсетом он назвал *Развитие современной математической статистики и роль Стьюдента*.

Затем Эгон Пирсон пришёл к мысли включить в этот сборник многие автобиографические материалы [Госсета]: летние каникулы с родителями; воспоминания о фермах в Йоркшире и Оксфорде [Оксфордшире] примерно на рубеже XIX – XX вв.; плавание под парусами [...] в 1920е годы; очарование итальянским искусством и особенно черно-белыми скульптурами и

архитектурой церквей; карандашные зарисовки побережья Шотландии; сведения о пятимесячном посещении США в 1931 г.

Э. П. собрал все, какие только смог, сведения о семье Госсетов; его планы разрастались, и он долго думал, как озаглавить этот *беспорядочный отчёт, который, как я полагаю, не принял бы ни один издатель*. Он решил временно назвать его *Обо всём и о Стьюденде*. Но он представлял себе, что, будучи в возрасте 84 лет, быть может и не закончит этой работы, которую он довёл лишь до апреля 1919 г.

Мы полагаем, что только Э. П. смог бы закончить начатое им предприятие, но что почти весь собранный им материал весьма ценен для составления биографии. И поэтому мы решили подготовить отчёт о жизни и статистических трудах Госсета, объединив опубликованное Пирсоном в 1939 г. с его *magnum opus* и с другими относящимися к делу материалами. В гл. 2-й мы описываем фон статистических исследований Госсета с особым упором на методы сочетания уравнений<sup>1</sup>, применяемые в астрономии и геодезии и на успехи биометрической школы, достигнутые под руководством Карла Пирсона.

В гл. 3-й на основе статьи McMullen (1939) и добавлений из других источников и писем Госсета обзревается его жизнь. Гл. 4-я является существенной переработкой написанного Эгоном Пирсоном о переписке его отца с Госсетом. Целью наших изменений было установление и пояснение описываемых тем. В 1962 г. McMullen разослал [коллегам] письма из переписки Госсета с Фишером из коллекции Guinness и впоследствии их использовала Joan Fisher Vox (1978).

В гл. 5-й представлена и охарактеризована основная статистическая сторона этой корреспонденции. Э. П. подразделил свои письма Госсету на шесть групп и пометил их в хронологическом порядке в каждой из них, так что каждое письмо можно установить по группе и номеру. К текстам писем он добавил исторические введения, обсудил группы и привёл краткие, а иногда непоследовательные комментарии, заключительные замечания, а также и копии писем. Мы предпочли тот метод классификации по темам, который он применил при обработке писем Карлу Пирсону, и распространили его на группы писем.

В гл. 6-й оставлен его общий комментарий и подразделение на группы, но отдельные комментарии и письма мы заменили описанием основных тем по группам с привлечением содержательных выдержек. Наконец, в гл. 7-й мы оценили достижения Госсета и обсудили его личные точки зрения и отношения с коллегами.

Много иного можно найти в обильном источнике, который Эгон Пирсон оставил потомству. Его автобиографические мемуары, хоть и менее обширные, чем запланированные им, несомненно окажутся полезными для будущей биографии. Reid (1982) уже описала личностную сторону совместной работы Неймана и Пирсона. Подробнее о семье Госсета и его коллегах, а также письма и траурные объявления, написанные сразу же после его смерти, добавят лишь немного к биографии 1939 г. В основном материал Пирсона относится к Госсету как к статистику, и на этой теме мы решили сосредоточиться.

## 2. Общий фон

**2.1. Введение.** Статистика это научная дисциплина, занимающаяся сбором, исследованием и истолкованием данных наблюдений и опытов. Её логически связанная структура основана на теории вероятностей и включает большое число различных методов, которые способствуют исследованиям и развитию всех отраслей науки и техники. Статистики во всём мире работают для правительств, промышленности, высшего образования и исследовательских институтов. Они организованы в национальные и международные профессиональные общества и регулярно встречаются для обсуждения своих успехов и в небольших семинарах, и на многолюдных конференциях. Их интересы простираются от теоретических исследований методологии до практических приложений в самых различных областях. Учебники, которые всесторонне описывают статистику, и периодические издания, которые сообщают об успехах во всей её деятельности, теперь представляют собой обильные сборники научного материала.

Столетие назад статистический мир был совсем иным. Оценка количественных данных издавна была сердцевинной статистики, но относилась она почти исключительно к социальным и экономическим проблемам<sup>1</sup>. Статистическая методология состояла из набора методов, которые сейчас считались бы достаточно элементарными, но которые могут ещё приводить к полезным выводам. Они включали подсчёты и классификации, действия со средними величинами и индексами, картами и диаграммами, описательные исследования и количественные законы (!).

Некоторые нынешние профессиональные объединения уже существовали, но были гораздо малочисленнее, их активными членами обычно были государственные статистики, а их публикации отражали узкий круг официальных интересов. Нормальный закон ошибок и метод наименьших квадратов были известны, применялись для исследования данных в астрономии и геодезии и описывались в книгах, посвящённых сочетанию наблюдений. Но эта деятельность оставалась вне статистики в её обычном смысле, и ни та, ни другая сторона не могла ничего предложить для создания надлежащих методов статистического изучения наследственности и эволюции.

И всё же во второй половине XIX в. постепенно выделилась небольшая группа выдающихся учёных, которая трудилась над решением этих практических проблем. И когда, наконец, были объединены основные потоки статистического прогресса, изменился охват и смысл статистики, которая с тех пор непрерывно расширялась, постепенно завоевывая все более разнообразные области.

**2.2. Сочетание наблюдений.** К середине XVIII в. теория вероятностей стала уже достаточно известна, чтобы позволить пересмотр методов сочетания наблюдений в астрономии и геодезии<sup>2</sup>. В течение последующих 70 лет эти методы постепенно

приобрели теоретическую структуру, в которой можно было выделить три основные черты: метод вычисления вероятностей возможных причин по известному событию, вероятностное распределение ошибок наблюдения, и алгоритм для оценки неизвестных констант, находящихся в линейных соотношениях друг с другом.

В 1764 г. Бейес доказал теорему для вычисления вероятностей причин, которая, впрочем, мало повлияла на тогдашнюю мысль, а в 1774 г. Лаплас предложил аналогичный метод. Вот перевод его фразы с французского [на английский] (Jevons 1874):

*Если событие могло произойти от некоторого числа различных априорно равновероятных причин, то вероятности существования этих причин, выведенные из события, пропорциональны вероятностям события, выведенным из них.*

В начале XIX в. это утверждение начало называться обратным приложением теории вероятностей, или короче, обращённой вероятностью, а теперь его назвали бы теоремой Бейеса с равномерным априорным распределением. Впервые обращённую вероятность при обсуждении сочетания наблюдений всерьёз применил Гаусс (1809)<sup>3</sup>. Он доказал, что нормальный закон [ещё никак не названный] является единственным, при котором арифметическое среднее случайной выборки наблюдений оказывается максимальным значением апостериорного распределения среднего [мыслимой] совокупности наблюдений. При нескольких таких средних, являющихся линейными комбинациями неизвестных констант, предположение о нормальности ошибок в сочетании с принципом обращённой вероятности, как заключил Гаусс, приводило к тому, что неизвестные константы лучше всего оцениваются по методу наименьших квадратов.

Другой подход к нормальному закону ошибок появился у Лапласа (1810), который показал, что сумма [среднее] большого числа ошибок распределена примерно нормально. Он распространил доказанное Муавром для биномиального распределения и получил промежуточную форму того, что сейчас называется центральной предельной теоремой<sup>4</sup>. Далее, он (1811) воспользовался этим асимптотическим подходом, показав, что метод наименьших квадратов можно обосновать без приложения обращённой вероятности, потому что в больших выборках средние абсолютные ошибки констант, оцениваемых по этому методу, сводятся к минимуму.

Наконец, Гаусс (1823) установил, что метод наименьших квадратов можно обосновать, если исходить из минимума средних квадратических ошибок оценивающих статистик<sup>5</sup>, притом без какого-либо обращения к нормальному распределению и при любом объёме выборки.

Так по существу закончилась героическая стадия развития статистики. Принцип обращённой вероятности стал стандартным методом вывода заключений, и Фурье и Курно [ссылки отсутствуют] применили его для формулировки утверждений, весьма напоминающих полученные много позднее в теории довери-

тельных интервалов. Было рассмотрено несколько законов ошибок, но нормальное распределение оказалось явно предпочтительнее, поскольку стало известно достаточное число его свойств. Метод наименьших квадратов был признан удобным для оценивания данных, и к 1826 г. [ссылки нет, и дата явно ошибочна] он был завершён во многих важных частных отношениях. В частности, [линейные] уравнения решались по методу [Гаусса] исключения неизвестных, матрица уравнений обращалась для вывода мер точности, дисперсии погрешности оценивались суммой квадратов остаточных свободных членов уравнений.

С середины и до конца XVIII в. и довольно долго в XIX в. теория вероятностей в Англии применялась в основном при страховании жизни, и английские авторы, исследовавшие эту тему, сосредотачивались на практических вопросах оценки ежегодной ренты и обращённых платежей (reversionary payments). Второе издание книги Лапласа (1812) сопровождалось длинным предисловием (1814), которое оказалось откровением и было встречено с большим интересом. Первые, отозвавшиеся на [появившееся] требование популярного изложения теории вероятностей и её строгого истолкования, в основном были воспитанниками Тринити-колледжа в Кембридже и активными сотрудниками Общества по распространению положительных знаний.

Оно публиковало дешёвые брошюры для рабочего класса, а в 1830 г. выпустило анонимное сочинение, авторство которого (Lubbock и Drinkwater-Bethune) впоследствии стало известным. Их книжка представляла собой переходный период в изложении теории; её приложение к страхованию жизни, сопровождаемое таблицами ежегодной ренты, обсуждалось в ней наряду с параграфами книги Лапласа (1812). Метод наименьших квадратов был описан лишь вкратце, и ничего не говорилось о законах ошибок.

Намного влиятельнее в этот английский переходный период теории вероятностей был Де Морган<sup>6</sup>, логик, профессор математики в Университетском колледже Лондона и автор очень большого числа математических статей в энциклопедиях, в том числе очерка (1837). Он чётко поддержал применение обращённой вероятности, включил в очерк обширное изложение книги Лапласа (1812) и привёл вывод нормального распределения по Гауссу (1809). Но его обоснование метода наименьших квадратов было не вполне удачным, поскольку он исходил из того, что и наблюдения, и коэффициенты исходных уравнений были равно изменчивы.

Более известным стал его очерк (1838), первая половина которого была по существу введением в учебник статистики, остальная же часть, как он считал, состояла из самого обычного приложения теории вероятностей, а именно к случайностям в жизни и страховым обществам.

По причинам, связанным с математикой и логикой, эти успехи в теории и приложении вероятности не были восприняты

бесспорно. Гаусс указал два обоснования метода наименьших квадратов, Лаплас предложил третье, и соотношение между этими различными видами представления следовало пояснить<sup>7</sup>. Эллис<sup>8</sup> (Ellis 1844) критически изучил все доказательства, облегчил математические затруднения в лапласовом анализе и горячо одобрил второе обоснование Гаусса, основанное на том, что ныне называется [выбором] линейных оценок с наименьшей дисперсией. Лапласовы же пояснения нормального закона ошибок продолжали представлять серьёзные проблемы. Его подход можно было защищать накоплением большого числа малых ошибок, но курьёзно, что для большинства читателей это оказывалось понятным только при возврате к предшествовавшим доводам, исходящим из биномиального распределения. Подобное упрощение принял Кетле (Quetelet 1846), но Гершель (Herschel 1850; перепечатка 1857 г.) в своей рецензии на скверный английский перевод Кетле, указал новый вывод нормального закона, исходящий из предположения о статистической независимости ошибки в любых двух взаимно перпендикулярных направлениях. Авторитет Гершеля был велик, и его объяснение закона ошибок стало общепризнанным, несмотря на незамедлительную и убедительную критику Эллиса (1850). Примерно через 20 лет эту тему вновь исследовал Глейшер<sup>9</sup> (Glaisher 1872), которого побудило сообщение о том, что американец Эдвейн независимо открыл метод наименьших квадратов в 1808 [1809] г. В основном Глейшер поддержал мнение Эллиса, но его главный вклад в обсуждение сочетания наблюдений состоял в его лекциях в Кембридже, которые считались критичными, конструктивными и исчерпывающими.

Практики были убеждены в том, что нормальный закон оказался подходящим, потому что он подтверждался распределением частот в столь различных случаях, как объём грудной клетки шотландских солдат [Кетле] и наблюдением Полярной на протяжении пяти лет<sup>10</sup>.

В понятии обращённой вероятности засомневались с логической точки зрения. Особенно критичен был Буль (Boole 1854):

*Было сказано, что принцип, заключённый [в нём] и в аналогичных случаях, состоит в равном распределении нашего знания, а скорее невежества: в приписывании различным состояниям вещей, о которых мы ничего не знаем, и притом именно по этой причине, равных степеней вероятности. Я, однако, предполагаю, что этот метод действия произволен.*

Таково было происхождение неоднократно звучащей фразы *равное распределение незнания*. Но Буль с осторожностью отрицал взгляды своего собрата, логика Де Моргана, который *полнее других английских авторов воспринял дух и методы Лапласа*. Проблема обращённой вероятности продолжала тщательно рассматриваться, особенно Венном (J. Venn 1866), который серьёзно возразил против её знаменитого следствия, *правила последовательности событий*<sup>11</sup>.

Впрочем, в начале 1880-х годов, обратившись к проблемам статистики, Эджуорт (Edgeworth 1884) сумел примирить различные мнения об обращённой вероятности:

*Приведенные примеры, особенно первый, могут показать, что предположения, связанные с обращённой вероятностью, вовсе не произвольны и представляют собой весьма неплохую рабочую гипотезу. Они наводят на мысль о том, что её особый вид, называемый правилом последовательности событий, быть может не настолько лишён смысла, насколько Венн хотел бы нас уверить.*

В течение XIX в. преобладали идеи Лапласа об обосновании теории сочетания наблюдений, и закон ошибок [нормальный] и метод наименьших квадратов оказывалось невозможным отделить друг от друга<sup>12</sup>. Обоснования, предложенные Гауссом, были менее влиятельными. Первое из них было выведено из спорного принципа, второе представлялось незначительной вариацией лапласова вывода, которое [к тому же] не указывало, что результат метода наименьших квадратов наиболее вероятен. Среди английских математиков Эллис был фактически единственным в своём горячем одобрении второго гауссова обоснования.<sup>13</sup> Но ведь Гаусс практически указал приложение обращённой вероятности и выработал и использовал методологию наименьших квадратов, которая стала общепризнанной в астрономии и геодезии. Эта тема созрела примерно через 20 лет, после чего усовершенствования последовали одно за другим. К примеру, Пирс (Peirce 1852) предложил критерий для отбраковки сомнительных наблюдений, а Петерс (Peters 1856) вывел оценку вероятной ошибки в функции абсолютных остаточных членов исходных уравнений<sup>14</sup>. И в то же время статистика в Англии начала принимать совершенно иное направление.

**2.3. Биометрия.** Статистическому исследованию наследственности положил начало Гальтон, разносторонний учёный эпохи королевы Виктории. Этот исключительный человек интересовался всем, был богат идеями и неутомим в их исследовании. Здесь мы должны указать, что он занимался психологией, наследственностью и антропологией, но его вспоминают и в связи с работами по метеорологии, введением метрической системы мер, отпечатками пальцев, фотографией и географическими исследованиями, а библиография опубликованных работ Гальтона занимает почти 15 страниц. Его влияние на статистику во многом может быть приписано сравнительно позднему формулированию его идей (1889), когда ему было уже 67 лет, и сразу же после этого открытию корреляции.

Среди первых читателей книги 1889 г. был Карл Пирсон, другой разносторонний учёный той же эпохи. В то время ему было 32 года, и в течение пяти лет он был профессором прикладной математики и механики в Университетском колледже Лондона. Интересы Гальтона были в основном научными, однако Пирсон уже в то время проявил себя профессионально компетентным в областях, далёких от математики, к примеру в философии, истории и литературе.

Вместе с Оливией Шрейнер, известной писательницей из Южной Африки, и Марией Шарп, на которой он впоследствии женился, Пирсон был активным членом *Клуба мужчин и женщин*, заинтересованного в улучшении отношений между мужчинами и женщинами. В этом клубе он прочёл доклад о книге Гальтона 1889 г. Хотя вначале он был настроен к ней несколько критически, его дальнейшая карьера была полностью посвящена статистике. В последнее десятилетие века появился поток статей, написанных им самим или совместно с другими как бы о теории эволюции, — о кривых плотностей, корреляции, регрессионном анализе.

В начальном периоде своей статистической карьеры Пирсон находился под влиянием двух других читателей Гальтона: Эджуорта, который занимался переводом экономики в количественную науку, и Уэлдона, биолога, который стремился развивать дарвиновскую теорию естественного отбора. Эджуорт, на 12 лет старше Пирсона, смог стать экспертом по статистической теории, и, воодушевленный Гальтоном, опубликовал ряд работ о корреляции. Его основным результатом была теорема о многомерном нормальном распределении, которое оказалось существенным элементом в некоторых работах Пирсона того времени. В письмах Пирсону Эджуорт также дал ему несколько дельных советов, но он был замкнут и обладал сложным характером, так что с ним нельзя было установить близких творческих отношений<sup>15</sup>.

Уэлдон, на три года моложе Пирсона, с 1891 г. был профессором зоологии в Университетском колледже Лондона. Убеждённый в том, что изучение популяций животных и растений поддерживает теорию Дарвина, он обратился к Пирсону за помощью по поводу встреченных им статистических проблем. Пирсон живо заинтересовался ими, и между ним и Уэлдоном возникла крепкая дружба, в результате которой родилась наука биометрия, образовалась биометрическая школа и в 1901 г. появился журнал *Биометрика*.

Биометрическая школа придерживалась гальтоновского *закона наследственности*, сформулированного в терминах регрессии, и оказалась вовлечённой в полемику после вторичного обнаружения работы Менделя по скрещиванию растений. Среди многих английских биологов, увлечённых простотой гипотезы Менделя, самым известным был Бэтсон. Впрочем, возможность сотрудничества биометрической и менделевской школ, которая так и не была прочной, исчезла со внезапной смертью Уэлдона в апреле 1906 г.

Семьи Уэлдона и Пирсона обычно проводили пасхальные каникулы вместе, так что Уэлдон и Пирсон с помощниками, например, Элис Ли, могли продолжать свои исследования. Уэлдон выехал в Лондон для лечения зубов и надеялся вернуться через несколько дней, но вместо возвращения пришло телеграфное извещение о его смерти. По мнению Эгона Пирсона, его отец так и не оправился полностью от потрясения.

В начале 1890-х годов Пирсон читал публичные лекции о графической статистике и законах случая, как можно больше основываясь на экспериментальных свидетельствах, и как можно



меньше на теории. Первый курс по теории статистики, по два часа в неделю, он прочёл в Университетском колледже Лондона в 1894/1895 г. Студентов было только двое, Элис Ли и Юл. После этого курс стал ежегодным, и группа Пирсона постепенно разрасталась. В 1903 г. он получил первый из многочисленных ежегодных грантов от фирмы Worshipful Co. of Drapers, которые позволили ему обеспечить работу биометрической лаборатории. С ней было связано обучение математической статистике и исследования в этой области, равно как и составление новых статистических таблиц.

После смерти Уэлдона основные интересы Пирсона и программа исследований сместились от чистой биометрии к евгенике, а в 1907 г. денежный дар Гальтона позволил основать лабораторию евгеники. До первой мировой войны, а частично и впоследствии, большое число мемуаров и курсов лекций по социальным проблемам и евгенике было основано на исследованиях, проведенных в этой второй лаборатории. Вместе взятые, обе они оказались основой биометрической школы Пирсона, а в 1911 г. при учреждении факультета прикладной статистики они были слиты.

С 1894 по 1930 г. Университетский колледж Лондона был единственным местом Англии, в котором преподавался повышенный курс статистики, и с 1906 по 1936 г. Пирсон оставался единственным редактором *Биометрики*. На протяжении большей части этого периода только в ней публиковались работы по теории статистики. В начале своей карьеры, почувствовав необходимость в статистическом совете, Госсет обратился к Пирсону именно ввиду репутации биометрической школы в области преподавания и исследований, и по той же причине по суждению все его статьи появились в *Биометрике*.

**2.4. Книги, которыми пользовался Госсет.** В письме Эгону Пирсону 11 мая 1936 г. Госсет вспомнил время до своего первого обращения к Карлу Пирсону:

*Я выучил то, что узнал об ошибках наблюдений, от Эри и стремился узнать, как учитывать, что модуль, [произведение  $\sqrt{2}$  на стандартное отклонение], выведенный по нескольким наблюдениям, также подвержен погрешностям.*

Эри (Airy 1861), член викторианского научного сообщества, написал первый английский учебник по сочетанию наблюдений. На его взгляды сильно влияла практика, а в основном он был известен тем, что в течение XIX в. привёл в порядок английскую астрономию. [Про свою книгу он написал]:

*Думаю, что в ней нельзя будет найти ничего существенно нового. [...] Она была написана без всяких ссылок на другие сочинения или на чёткие воспоминания о них. Единственным исключением была книга Лапласа (1812)<sup>16</sup>.*

В книге четыре части. В первой рассматривается закон вероятности ошибок и различные относящиеся к нему константы, как вероятная ошибка<sup>17</sup> и модуль. Этот закон в первом издании обосновывался доводом длиной в 8 страниц из 103, близко напоминавшим лапласов вариант центральной предельной

теоремы. В дальнейших изданиях Эри привёл иной довод, основанный на рассуждении Гершеля, потому что *окончательные шаги у Лапласа очень неясны и трудны*.

Значения средней и вероятной ошибок линейных комбинаций [ошибок] *выведены* во второй части по серии  $n$  наблюдений. В частности,

вероятная ошибка среднего =  
0,6745 [средней квадратической ошибки среднего]<sup>18</sup>.

В третьей части описан метод наименьших квадратов для искоемых параметров числом не более трёх. Французское *наименьшие квадраты* он переводит термином *минимальные квадраты*, который редко применялся после 1825 г.<sup>1</sup> Влияние Лапласа очевидно в том, как он вывел этот метод. Последняя часть озаглавлена *О смеси ошибок различных классов и постоянных ошибках*. Эри приводит пример серии ежедневных наблюдений, подверженных суточной *постоянной ошибке*, закон которой отличен от закона обычных ошибок. Он подробно описывает вычисление *среднего несогласия результатов каждого дня* и его вероятной ошибки, сравнивает эти две величины и заключает: существует ли постоянная ошибка или нет *целиком зависит от суждения вычислителя*.

Рецензент книги Эри в *American Journal of Science and Arts* за ноябрь 1861 г. попытался выявить, что метод Эри выбора линейной комбинации с наименьшей вероятной ошибкой отличался от метода наименьших квадратов, который применялся большинством учёных. Поскольку можно судить через сто лет после публикации книги, на основе тогдашних стандартов она представляла неплохое введение в исследование данных наблюдения с соразмерно и ясно описанными темами. Но в ней слишком много описаний. Теория иллюстрирована задачами астрономии и геодезии, но результаты неизменно выражены в алгебраической форме. Численных примеров нет, лишь в приложении ко второму изданию теоретический закон плотности ошибок подтверждается сравнением наблюденных и ожидаемых частот, чтобы тем самым *обосновать все исследования в этой книге*.

Госсет пользовался также книгами Merriman (1884) и Lupton (1898). Первый был американским инженером-строителем, который исследовал историю методов сочетания наблюдений [Merriman 1877]. Его книга отражает эти интересы, и она была, видимо, признана полезным изложением теории и практики темы. Он привёл два вывода закона вероятности ошибок. Точность величин, выведенных из наблюдений, он оценивал вероятными ошибками и учитывал неопределённость этой меры. Метод наименьших квадратов он пояснил подробно со многими примерами из геодезической практики. В книге кратко описаны распространение ошибок, отбрасывание сомнительных наблюдений, социальная статистика и медиана по Гальтону<sup>19</sup>. Параграф о неопределённости вероятной ошибки в общих чертах повторяет мемуар Гаусса (1816).

В 1809 г. Гаусс основал метод наименьших квадратов законом ошибок

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 \Delta^2),$$

где  $\Delta$  – погрешность, а  $h$  – мера точности. С современной точки зрения это распределение нормально с нулевым средним и дисперсией  $1/2h^2$ . В 1816 г. Гаусс обсуждал определение  $h$  по выборке из  $m$  погрешностей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ . Для  $h$  он принял равномерное априорное распределение и показал, что её апостериорное распределение нормально со средним

$$H = \sqrt{m} \div \sqrt{2 \sum_{i=1}^m \Delta_i^2}$$

и дисперсией  $H^2/2m$ .

Для стандартного нормального распределения вероятность  $h$  находится в пределах  $\pm \rho\sqrt{2}$ ,  $\rho = 0,4769363$ , равна  $1/2$ . Гаусс заключил, что существует соотношение шансов 1:1 для того, чтобы истинное значение  $h$  находилось в интервале  $H(1 \pm \rho/\sqrt{m})$  и что  $R/(1 \pm \rho/\sqrt{m})$ ,  $R = \rho/H$ , есть соответствующий интервал для вероятной ошибки  $r$ .

Он, далее, распространил своё исследование, рассмотрев интервальную оценку  $r$  по суммам  $n$ -х степеней абсолютных погрешностей и привёл таблицы вероятных пределов  $r$  для  $n = 1, 2, \dots, 6$  при больших  $m$ . Соответствующие формулы он обозначил числами I, II, III, IV, V и VI и заключил, что наиболее благоприятна формула II: 100 погрешностей, обработанных по этой формуле, приводят к такому же надёжному результату, как 114 ошибок по формуле I, 109 по формуле III, ..., и 251 погрешностей по формуле VI. Но вычисления по формуле I нетрудны, и она лишь слегка уступает формуле II. Формулы, соответствующие случаям I и II с использованием остаточных свободных членов исходных уравнений вместо ошибок, называются по имени Петерса и Бесселя соответственно<sup>20</sup>.

В небольшой книге Lupton (1898) 22 главы, большинство из которых содержит всего лишь несколько страниц. Подзаголовок указывает, что книга является

*наброском методов, применяемых для установления смысла и значений количественных наблюдений и экспериментов в физике и химии и составления сводок полученных результатов.*

Менее половины книги имеет статистический характер, а по стандартам 1898 г. обработка материала в основном поверхностна. В книге, однако, приведено более 40 ссылок для содействия читателям, что должно было составлять её основное достоинство для тех, кто пожелает более тщательно заниматься этим предметом. Авторы названных книг включают Лапласа, Бертрона, Гальтона, Эджуорта и Карла Пирсона, равно как и Эри, Шовене и Мерримана.

**2.5. Лекции Карла Пирсона.** С 1870 по 1880 г. Глейшер активно интересовался сочетанием наблюдений и читал лекции на эту тему в Кембридже. Госсет, однако, посещал только лекции Пирсона. К концу 1891 г. К. П. ознакомился с английской школой политической арифметики, немецкой школой государственстведения и французской школой теории вероятностей (Депарсье, Лаплас, Кетле). Содержание его публичных лекций в Грешем-колледже по *геометрии статистики и законам случая* отражают его изменяющийся в 1891 – 1894 гг. взгляд на статистику.

Он начал с описания всякого рода диаграмм, перешёл к элементарному изложению теории вероятностей и закончил обсуждением проблем, возникавших в биометрии. В частности, он затронул априорные вероятности и принцип *равномерного распределения незнания* в связи с мнениями Бейеса, Лапласа, Буля, Венна и Эджуорта. Не менее двух лекций он посвятил *нормальным кривым*, но, судя по названию его курса, метод наименьших квадратов не мог быть включён в него. В ноябре 1892 г. он описал рекомендованные им источники:

*Для тех из вас, кто сможет найти время для чтения, я усиленно рекомендую сравнить Jevons (1874, главы 10 – 12), J. Veenn (1866, главы 6 – 11) и Эджуорт (1884). [...] Я могу также сослаться на Де Моргана (1847), главы 9 – 11 которой родственны нашим первым двум лекциям. Его же небольшая книжка (1838) всё ещё полезна и наводит на размышления, но требует некоторых математических знаний. Whitworth (1878, 3-е издание) – прекрасная книга для подхода к элементам математической теории, а для тех, кто читает по-немецки, Westergaard (1890) – намного лучший источник по соотношению статистики и вероятности.*

Быстрое развитие теории статистики привело к необходимости существенного изменения курсов лекций от года к году. Но после 1893 г. Пирсон неизменно обращал предпочтительное внимание на методы, которые, как казалось, были бы полезны для изучения наследственности и эволюции. Материал его университетских лекций известен по записям Юла 1894/1895 и 1895/1896 гг., см. Yule (1938), Госсета (1906/1907 г.), Иссерлиса (1913 г.) и Эгона Пирсона (1920/1921 г., лекции для студентов первого и второго курсов).

Комментарий Юла (1938) подтверждает осведомлённость Пирсона о континентальном направлении статистики:

*Первый курс начался с краткого обзора истории вплоть до определения статистики в соответствии с Kollektivmass<sup>21</sup>. Как и следовало ожидать, среди трудов, на которые он ссылался, были Zeuner (1869), Лексис, Эджуорт, Вестергаард (1890) и Levasseur (1885). Но подумал ли любой иной лектор предложить изучение Marey (1878, 1885)? Пирсон был восторженным поклонником графического представления данных и мышления.*

Ответом на вопрос Юла служит ссылка Эджуорта на Marey во второй из его лекций в 1892 г. в Университетском колледже Лондона. Некоторые темы считались обязательными во всех курсах: теорема Бейеса с *равным распределением незнания*;

кривые Пирсона; биномиальное и нормальное распределения; корреляция; многомерный нормальный закон. Другие темы были включены позднее: метод наименьших квадратов; параболическая регрессия; распределение Пуассона. Содержание лекций менялось в соответствии с успехами статистики или повторными открытиями, в основном достигнутыми в Биометрической школе: таблицы сопряжённых признаков; критерий хи-квадрат; метод последовательных конечных разностей (variate difference correlation method), распределение стандартного отклонения в нормальных выборках. Критерий  $t$  появился лишь после 1921 г., возможно в связи с пожеланием более молодых штатных членов.



### 3. Уильям Сийли Госсет

**3.1. Введение.** Старинная гугенотская семья Госсет покинула Францию в 1685 г. после отмены нантского эдикта. Она принадлежала к среднему слою общества с военными и религиозными связями. Среди военных был Фредерик Госсет, полковник инженерных войск, который в 1875 г. женился на Агнессе Сийли Видал. Среди их пятерых детей Уильям Сийл, родившийся 13 июня 1876 г. в Кентербери, был старшим. Он был достаточно смышлён и получал стипендии, которые служили желанным подспорьем для его обучения, потому что семье пришлось жить скромно.

С 1889 по 1895 г. Госсет был стипендиатом Уинчестерского колледжа. Это учебное заведение в 1382 г. основал Уильям Wykeham, а к концу XIX в. оно, как и другие привилегированные замкнутые частные средние школы, стало интеллектуально возрождаться. Со своим плохим зрением Госсет не мог подобно отцу служить в инженерных войсках. Он стал стипендиатом в Ньюколледже в Оксфорде, который также основал Wykeham. Здесь, в 1897 г., он получил высшую оценку по математике на первом бакалаврском экзамене и покинул колледж в 1899 г. со степенью первого класса по химии.

В октябре того же 1899 г. Госсет стал пивоваром в дублинской фирме Arthur Guinness, Son & Co., изготовителей крепкого портера и оставался в ней всю свою трудовую жизнь. Незадолго до этого фирма решила ввести в своём производстве научные методы, и это новшество было осуществлено наймом на должности младших администраторов лиц с научными степенями первого класса из Оксфорда и Кембриджа. Следующим пивоваром после Госсета был назначен Джефффри С. Филпотс, и эти двое молодых людей стали близкими друзьями с общим интересом к прогулкам в горах возле Дублина и плаванию под парусами вдоль побережья. В результате этой дружбы Госсет встретил свою будущую жену Марджори Surtees Филпотс, сестру Джефффри. 16 января 1906 г. они поженились, жили вначале в Дублине, затем на короткое время, с сентября 1906 до весны 1907 г., сняли меблированный дом в Уимблдоне, поскольку Госсет посещал лекции и консультации Пирсона в Университетском колледже Лондона. В то время у семьи Госсет родился сын, за ним – две дочери, и после 1913 г. они стали жить в доме с большим садом в пригороде Дублина на побережье Дублинского залива.

**3.2. Ранняя статистическая карьера.** Госсет был практичен, и свои статистические методы он разрабатывал в соответствии с нуждами пивоварни. Исследования по поводу отбора, возделывания и обработки ячменя и хмеля привели к накоплению данных, подверженных вариациям этих культур, восприимчивым к изменениям температуры, притом по необходимости ограниченных короткими сериями экспериментов.

Вскоре выявились проблемы истолкования малых выборок с зависимыми измерениями, и фирма обнаружила, что Госсет мог помочь в исследовании данных. На этой стадии его советы были

основаны на изучении книг по теории ошибок, особенно Airy (1861) и Merriman (1884). В ноябре 1904 г. его консультативная работа послужила основой для отчёта правлению фирмы, *Применение закона ошибок к работе пивоварни*.

В этом отчёте Госсет привёл доводы в пользу применения статистических методов, обсудил кривую ошибок<sup>1</sup> и проявил некоторую осведомлённость в последствиях корреляции, сравнив различие между  $\sum(A + B)^2$  и  $\sum(A - B)^2$ . Он, наконец, предложил справляться у математиков *о степени вероятности, которую следует принять как доказательство различных утверждений*. Вскоре Вернон Харкур, лектор по химии в Оксфорде, письменно представил Госсета Пирсону, и они встретились 12 июля 1905 г. во время длительного отпуска Пирсона. Госсет приехал к нему, чтобы обсудить ряд вопросов, связанных со стоимостью экспериментов, пределами погрешностей при повторных измерениях, соотношениями между сериями наблюдений и справочной литературой. Записи Пирсона об этой встрече включают формулу для дисперсии  $A \pm B$  и вероятной ошибки коэффициента корреляции, равно как и ссылки на статьи по теории статистики<sup>2</sup>. В письме 11 мая 1936 г., после смерти Пирсона, Госсет сообщил Эгону Пирсону об этой встрече:

*Он сумел за полчаса направить меня на изучение практической стороны почти всех тогда применяемых методов [...].*

Непосредственным последствием встречи стало дополнение к отчёту 1904 г. и второй отчёт 1905 г. о корреляции. Влияние Пирсона отразилось в обоих документах. Впрочем, в отчёте о корреляции было отмечено, что в отличие от биометрической школы пивоварня работает с малыми выборками, и Госсет близко подошёл к пониманию опасности применения к ним методов, разработанных для больших выборок, без их приспособления.

Фирма Гиннес практиковала отсылку своих штатных работников на специализированную подготовку, и Госсет дважды воспользовался подобными возможностями. Он прослушал курс о brown beers (мягком, сладком, тёмном пиве) в университете Бирмингема, научился там применять гемоцитометр и начал думать о том, сколько квадратиков следует сосчитать, чтобы достаточно точно оценивать концентрацию дрожжевых клеток.

Позднее Госсет провёл первые два триместра 1906/1907 г. в тесном сотрудничестве с биометрической лабораторией, что оказалось другим последствием его встречи с Пирсоном. Этот период он вспомнил после смерти Пирсона:

*Должен сказать, что я немного узнал из его лекций, да и вообще у меня никогда не было иначе, а мои математические познания были для этого недостаточны. С другой стороны, я много приобрёл от его обходов [лаборатории]. Помню, к примеру, что он вставил недостающее звено в моей статье об ошибке среднего [1908a], соучастие в которой он отказался признать.*

В этот период своей жизни Госсет в основном выводил и применял различные выборочные распределения, а жена копировала результаты измерений и таблицы. В своей первой статье он сравнил сосчитанное число дрожжевых клеток с экспоненциаль-



ным пределом биномиального распределения. Подготавливал он эту статью [1907] до встречи с Пирсоном. Фирма разрешила публикацию при условии, что она появится под псевдонимом и что никакие их данные не будут использованы в ней. Подобная одержимость секретностью не была необычной прихотью. В Англии секретность в промышленности и коммерции широко распространена до сих пор. Вплоть до начала второй мировой войны штатным работникам фирмы запрещалось публиковаться под своим собственным именем, и Госсет стал Стьюдентом. Последующие работники фирмы были аналогичным образом упрятаны под псевдонимами.

**3.3. Переписка.** У Госсета было много корреспондентов, в основном экспериментаторов, и немало свободного времени уходило у него на составление писем.<sup>3</sup> Участие Госсета в продвижении статистических методов в промышленность и сельское хозяйство в очень большой степени проясняется в его переписке с К. П., Фишером и Эгоном Пирсоном. Она позволяет установить связь статей Госсета с постепенным развитием его идей и соотношение между этими статьями и показывает, насколько он испытывал влияние других статистиков и сам влиял на них.

Существует около 40 его писем Пирсону, но, к сожалению, сохранилось только три письма в обратном направлении. Laurence McMullen, преемник Госсета в качестве главы статистической секции пивоварни, предположил, что примерно в 1934 г., когда семья Госсет покидала Ирландию и перебиралась в Англию, громадный и ценный материал был уничтожен. Погибли письма Пирсона и машинописный вариант трёх или четырёх глав элементарного учебника о применении статистических методов в экспериментировании.

С точки зрения истории [статистики] это крайне печально. Письма Госсета показывают его как проникательного и объективного критика. Он был готов исследовать интересующее его, даже если оно не было связано с его обязанностями пивовара. И было бы полезно знать, в какой степени Пирсон принимал очень мягко выраженную критику в свой адрес.

Грубо говоря, существует около 150 писем Госсета Фишеру, но только 50 в обратном направлении; уничтожено, стало быть, около сотни. Очень жаль эту потерю, которая всё же не так велика, как в случае с письмами Пирсона, потому что здесь существуют иные обстоятельства. Сохранившиеся письма Фишера в достаточной степени показывают условия его переписки с Госсетом, и многое можно вывести из вопросов, на которые Госсет отвечал. Более того, Фишер составил сводку [своих] писем, быть может при составлении некролога Госсета (1939). Его краткие комментарии иногда информативны, но часто они упускают важные темы. В случаях, при которых комментарии противоречат самим письмам, их следует считать менее надёжными.

Письма Госсету от Эгона Пирсона сохранились на фирме, вероятно потому, что многие были показаны помощнику Госсета,

Эдуарду Самерфильду, с просьбой прокомментировать их. Мы описываем их в гл. 6-й.

**3.4. Профессиональная деятельность.** 24 октября 1907 г. Госсет сообщил Пирсону, что окончательно (а не временно, как раньше) назначен главой экспериментальной пивоварни, и что теперь у него появился некоторый объём статистической работы. Пирсон представлял себе возможности Госсета и в том же 1907 г. сообщил, что готов поискать для него должность, соответствующую его подготовке и способностям. Но 11 сентября 1909 г. Госсет ответил, что для главы разрастающейся семьи оклад содержания должен был бы быть очень неплохим, иначе же он не сможет позволить себе отказаться от своей нынешней должности.

*Прошу Вас не считать себя обязанным подыскивать мне что-либо. Я вовсе не разочарован своим нынешним положением. В конце концов, не так часты должности с годовым окладом в 800 фунтов, хотя легко представить себе, как я мог бы лучше использовать своё время.*

В 1910/1911 г. средний годовой оклад профессора английского университета составлял 600 фунтов, лектора и помощника лектора, 250 и 150 фунтов (Halsey & Trow 1971). Во всяком случае, экспериментальные проблемы в пивоварне предоставляли Госсету, – математику, химику, уже заимевшему некоторые статистические познания, – подходящее поле для применения своих способностей.

Выявляя заблуждения, свойственные экспериментальному выборочному методу и приёмы уклонения от них, Госсет несомненно сообщил Пирсону, вероятно при личной встрече, как он предполагал написать учебник по этой теме. Подобная книга была, видимо, задумана на основе совместных опытов со специалистом по солодовым напиткам Эдвином S. Beaven, который был прикомандирован к фирме Гиннес. В письме 8 декабря 1910 г. Госсет вновь обратился к той же теме:

*В учебнике для экспериментаторов я склонен написать введение, оглавление и несколько глав и послать всё это Вам (в машинописи!), чтобы узнать Ваше мнение о том, есть ли смысл написать подобную книгу. Она определённо нужна, но боюсь, что столь малому числу лиц, что вряд ли можно надеяться найти издателя.*

*Полагаю, что я неплохо устроен с практической точки зрения. Большое число своего рода коэффициентов корреляции и т. д. несомненно проходит через мои руки, чем через чьи бы то ни было в мире, даже включая Ваши. Но в основном вопрос заключается во времени, которого ни у кого из нас не хватает.*

Следующее письмо Госсет начал писать 6 февраля 1911 г. с комментарием о великих алкогольных дебатах, в которых Пирсон тогда участвовал по причинам, которые мы поясняем в § 4.5. Письмо заканчивается кратким комментарием о составлении текста книги:

*Книга продвигается медленно, потому что сейчас мои обязанности оставляют меня в обеденный перерыв без пишущей машинки, но я надеюсь послать первые три главы через месяц*

или два. Не беспокойтесь с ответом. Вам несомненно вполне достаточно поддерживать переписку с трезвенниками, без того, чтобы думать о пивоварах.

Это было, видимо, последним упоминанием об учебнике, неоконченный машинописный текст которого был бы может уничтожен в 1934 г. Пойми Пирсон значимость его чернового варианта, он бы поощрил Госсета закончить работу и бы может опубликовал её в *Drapers Co. Research Memoirs*. Но возможно также, что довольно скрытное правление фирмы Гиннес не разрешило бы подобной публикации. Прогрессивный управляющий фирмы, La Touche, в основном ответственный за решение принимать на работу научно подготовленных пивоваров, довольно неожиданно умер в 1914 г.

Как только в том же году началась война, Госсет предложил свои услуги Пирсону. 26 августа он сообщил, что мог бы посвящать около трёх часов в день и воскресенье проверкам или вычислениям, вероятно смог бы также без особых хлопот одолжить арифмометр *Брунсвига* из пивоварни.

К 1 сентября следующего года он, казалось, смирился с тем способом, которым наилучшим образом мог бы проявлять усилия для военных целей:

*Мой собственный вклад [...] очевидно состоит в том, чтобы варить крепкий портер фирмы Гиннес с наименьшими затратами труда и сырья, и я надеюсь добиться чего-нибудь достаточно похвального в этом направлении. И всё же я хочу, чтобы правительство снова удвоило налог [на пиво?], ведь это [изготовление пива] теперь такая очевидная потеря корма для свиней.*

На протяжении большей части 1916 г. биометрическая лаборатория исследовала крутильное напряжение (*torsional strain*) в лопастях воздушных винтов<sup>4</sup>, и 7 мая Госсет видимо обсуждал эту проблему с Пирсоном в длинном письме, и его статистическую часть мы рассмотрим в § 4.5. Госсет заканчивает его кратким выражением своего разочарования тем, что его отказались призвать в армию: *Доктора военного министерства решили, что для службы в армии я слишком близорук.*

В 1922 г. Госсет заимел своего первого постоянного статистического помощника, Эдуарда М. Самерфильда, и его переписка с Фишером в ноябре обсуждала меры, необходимые для трехмесячного добровольного участия Самерфильда в исследовательских работах в Ротамстеде. 15 ноября Госсет сообщил о финансовой стороне командировки:

*Я вполне понимаю, что никакой оплаты или взноса не требуется, но нам представляется, что если фирма нашего ранга посылает сотрудника для обучения, то мы обязаны заплатить за это. И поэтому мы думаем, что Ваши неформальный намёк о необходимой сумме с указанием того фонда, в который мы могли бы внести деньги, помог бы делу. Не хотите ли Вы предложить уплату в 25 фунтов? Если этого слишком мало, я постараюсь достать больше. Я не знаю мнения правления и не могу поручиться даже за 25 фунтов, но надеюсь получить эту сумму.*

Аналогичные меры были приняты в октябре 1930 г. для работы помощника Самерфильда, А. Л. Муггау, в Ротамстеде в течение примерно шести месяцев, и в тот раз фирма была готова уплатить 50 фунтов.

Отец и сын Пирсон повлияли на то, что Госсет стал членом научных обществ. Когда после первой мировой войны Карл Пирсон изменил учебную программу факультета прикладной статистики, он основал общество биометристов и математических статистиков<sup>5</sup>, как бы семинар, в основном посвященный обсуждению исследований на факультете. Как стало теперь обычным, семинар приглашал специалистов со стороны участвовать в своей работе. Госсет прочёл доклады 13 декабря 1920 и 28 мая 1923 гг. о коэффициентах корреляции Спирмена и исследовании разнородностей зерновых культур; оба они были впоследствии опубликованы [1921, 1923].

В 1927 г. Общество было распущено, но через несколько лет деятельность Эгона Пирсона в 1933 г. побудила Королевское статистическое общество учредить секцию промышленных и сельскохозяйственных исследований. Именно таковы были темы исследований, которыми Госсет особо интересовался. В 1934 г. его избрали в это Общество, и он участвовал в заседаниях новой секции.

В октябре того же года Госсет начал исключительно заниматься новой пивоварней фирмы Гиннес на северо-западе Лондона, и в конце 1935 г. выехал из Дублина, чтобы занять должность главного пивовара, ответственного за более научную сторону производства. Он умер от сердечного приступа 16 октября 1937 г. в возрасте 61 года.

**3.5. Характер и личность.** Госсет был скромн, мягок и терпим<sup>6</sup>, совершенно незлобив и недолголюбив споры. Трое его детей, как и он сам, росли в довольно скромных условиях. Он не терпел мотовства, но не жалел средств на образование и часто был щедр к нуждающимся. Он был основательно знаком с событиями в мире, а его интересы к домашним делам и спорту были исключительно широкими. Он был пытливым плодоводом и особо выращивал груши, а также умелым садоводом и наслаждался экспериментированием. Он как-то скрестил малину с логановой ягодой, но полученный гибрид не вошёл в употребление. Увлечение ходьбой, ездой на велосипеде, рыбной ловлей, коньками и лыжами началось у него ещё в школьные годы. Он был хорошим плотником и построил несколько лодок, в том числе разборный деревянный ялик для рыбной ловли на озёрах.

Заметка в *Field* от 28 марта 1936 г. описывает его лодку для рыболовов с удочкой, оборудованной рулями на её обоих концах для регулирования направления и скорости сноса. Он был неплохим, хоть и не выдающимся стрелком. Он сломал себе бедро, когда его Ford T, в просторечье *летающая кровать*, перевернулся в июле 1934 г. До этого он регулярно играл в гольф, применяя примечательную коллекцию старых клюшек, изготовленных не позднее начала века. После этого несчастного случая он принялся с большим воодушевлением играть в шары. Послед-

ний подходящий взгляд на Госсета представляет его фотография апреля 1936 г. Он был одет в пиджак из твида, шорты и башмаки, с рюкзаком на спине и тростью и удочкой в руках, и смотрел пристально на заснеженное плато Дартмур. Его дочь Берта сообщила Эгону Пирсону о своих ранних воспоминаниях.

*Как и многие его современники, он любил оперы Gilbert и Sullivan и, если только мог, например, в Оксфорде, а позднее в Дублине, не пропускал представлений D'Oyly Carte Co. Он играл в дудочку, а после женитьбы пел нам, детям, песни. Ему было радостно, когда у нас появилось первое радио, собранное моим братом Гарри примерно в 1922 г. И после этого он всю жизнь непрерывно слушал хорошую музыку, ознакомился и оценил [композиторов], особенно своего любимого Бетховена, с чем мы все были согласны.*

*Мне известен только один университетский преподаватель, которым он чрезвычайно восхищался. Это был доктор Спуннер из Ньюколледжа. Недавно я прочла его автобиографию Life и поняла, что отец был в этом колледже как раз до того, как Спуннера единогласно избрали ректором. Очевидно, все его крайне уважали. В нашей гостиной висела репродукция его портрета, и я уверена, что он повлиял на отца, потому что у них было много общего, особенно безусловная честность, широкий круг интересов, скромность и способность принимать на себя бесконечные хлопоты. Я так наслаждалась, читая его книгу, главным образом потому, что в основном она так сильно напоминала мне о моём отце.*

*Мне трудно ответить [на Ваш вопрос] о религии, потому что мой отец был очень молчалив. Он помогал маме, которая брала нас с собой в церковь, и сам посещал церковь, пока мы были маленькими, но не позднее. Он объяснил нам своё отсутствие, сказав, что очень часто бывал в церкви, будучи молодым (в Уинчестере?). Он с большой осторожностью никогда не говорил ничего, что могло бы подорвать нашу веру, и мы все выросли активными христианами.*



## 4. Карл Пирсон

**4.1. Введение.** Почти все статьи Госсета имели началом проблемы, возникавшие в работе пивоварни по изготовлению крепкого портера и выращиванию ячменя. Его внимание поэтому было направлено к статистическим методам в приложении и к промышленности, и к земледелию. С 1906 по 1919 г. он находился в регулярном общении с Карлом Пирсоном, т. е. встречался и переписывался с ним. Вопросы, которые его интересовали, были поэтому крепко связаны с деятельностью биометрической школы. Этот период охватывает примерно половину опубликованных исследований Госсета и практически все его изыскания по корреляции, временным рядам и дискретным распределениям. Письма Госсета К. Пирсону содержат не только первые намёки на последующие статьи, часто появлявшиеся лишь через несколько лет, но и его комментарии и критические замечания о различных темах, которые, как можно было ожидать, заинтересовали бы его бывшего учителя.

**4.2. Корреляция.** Описав идею корреляции. Гальтон предложил графический метод, основанный на медианах и вероятных ошибках, для вывода выборочного значения коэффициента корреляции. Эджуорт заново рассмотрел его метод и подошёл ближе к ныне общепринятому определению, но не совсем ясно, насколько ближе. Многие в теории многомерной нормальной корреляции разработал К. П. в 1896 г. Так, он показал, что *наилучшее значение  $r$*  коэффициента корреляции в выборках из двумерного нормального распределения даётся формулой смешанного момента. Он также получил неверное выражение для стандартного отклонения  $r$ , исправленное в его совместной статье Pearson & Filon (1898). Примерно тогда же Sheppard<sup>1</sup> (1898) опубликовал метод оценки коэффициента корреляции двойной классификацией (doubly classifying at medians), а Юл (1897) установил связь теории корреляции и метода наименьших квадратов.

Таковы были основные результаты о двумерной нормальной корреляции, когда Госсет в своём отчёте 1904 г. заметил, что правило вероятной ошибки сумм или разностей иногда практически не работало. Результаты Пирсона и Филон (1898) были, видимо, выведены из асимптотического апостериорного распределения коэффициента корреляции при равномерном априорном распределении всех параметров. Эта точка зрения обращённой вероятности отражена в основной цели статьи Госсета (1908b):

*Нам требуется определить вероятность того, что  $R$  [коэффициент корреляции] совокупности, из которой были отобраны выборки, находится внутри каких-либо заданных пределов. Ясно, что для решения этой задачи мы должны знать 1) распределение значений  $r$ , полученное по выборкам из совокупности с известным  $R$  и 2) априорную вероятность того, что  $R$  для совокупности находится внутри заданных пределов.*

Но 2) вряд ли можно будет когда-либо установить, и поэтому в общем случае требуются какие-то произвольные предположения. А если нам известно 1), то можно будет обсудить, какое предположение окажется наилучшим. Пока же я могу предложить два более или менее очевидных распределения. Первое: все значения в пределах  $-1$  и  $1$  равновероятны. Второе: вероятность того, что значение равно  $x$ , пропорциональна  $(1 - x^2)$ . Это, как я полагаю, более соответствует обычному опыту и распределение априорной вероятности будет тогда выражено уравнением

$$y = 3/4(1 - x^2).$$

Госсет начал с выборок объёмами 4, 8 и 30 из обширной совокупности, в которой известно истинное значение  $R$  коэффициента корреляции было равно 0,66. Используя те же данные, и, чтобы сократить вычисления, принимая значения  $x$  из одной выборки и значения  $y$  – из другой, он вывел выборочные значения  $r$  для случая  $R = 0$ . Учитывая математические рассуждения для выборки объёмом 2, он по догадке определил кривую Пирсона типа II с уравнением

$$y = y_0(1 - x^2)^{(n-4)/2}$$

и вычислил соответствующие моменты. Они оказались в общем согласии с выборочными моментами для  $R = 0$ , и он заключил, что его уравнение

*вероятно выражает теоретическое распределение  $r$  при отборе выборок объёмом  $n$  из нормально распределённой совокупности без корреляции.*

Но в случае корреляции предложить уравнение он не смог, хоть и указал причины, по которым требуемое распределение не могло быть представлено кривой Пирсона если только  $R \neq 0$ . Поскольку решение для 1) было получено только для  $R = 0$ , никакого апостериорного распределения  $R$  получить было нельзя.

Аналогичные методы Госсет применил в статье (1908а), чтобы предложить уравнение для распределения выборочного стандартного отклонения. Теперь его рассуждения привели Пирсона к намётке направления исследования Сопера (Soper 1913)<sup>2</sup>. Прежние аппроксимации для среднего значения и стандартного отклонения  $r$  были улучшены приложением асимптотических разложений, теоретические значения были сравнены с наблюдаемыми и Сопер выразил надежду, что

*Будут проведены дальнейшие эксперименты, которые [...] окончательно покажут, [...] обосновано ли применение стандартных типов кривых плотности к распределениям статистических констант в малых выборках.*

Эта статья обратила внимание Фишера на рассматриваемую проблему. В сентябре 1914 г. он послал рукопись Пирсону и вскоре (1915) она была опубликована. Фишер одобритительно отозвался о работах Госсета и Сопера и подтвердил, что



предсказанные Госсетом распределения стандартного отклонения и коэффициента корреляции при  $R = 0$  были верными, а для больших выборок, при которых точные формулы страшно усложняются, выражения Сопера оказались весьма точными. Затем он вывел распределение коэффициента корреляции блестящим геометрическим рассуждением и при помощи своего *абсолютного критерия* указал приближение, которое позже назвал оценкой наибольшего правдоподобия коэффициента корреляции, *наиболее вероятным значением корреляции всей совокупности*.

15 сентября 1915 г. Госсет подтвердил получение оттиска [статьи Фишера], но заметил, что вопрос об апостериорном распределении всё ещё не решён. Предложив вид априорного распределения, он быть может ошибочно написал  $(1 - x)$  вместо  $(1 - x^2)$ :

*Я очень рад, что моя проблема оказалась на шаг ближе к решению (мне никогда не нравилось приближение, полученное Сопером, хоть оно и было колоссальным успехом). Но всё ещё требуется определить кривую вероятности, которая выражает вероятность истинного значения (для бесконечной совокупности) в случае, когда выборка объёма  $x$  приводит к  $r$ . Этого, конечно, надо достигнуть для двух или трёх априорных вероятностей, а если удобно поступить иначе, я бы испытал*

$$y = y_0(1 - x)^{(m-4)/2}$$

при  $t = 3, 4$  и  $6$  в качестве априорного распределения вероятности того, что  $x$  – истинное значение  $r$ .

Далее в письме описываются предпосылки его работы над корреляцией:

*Не знаю, будет ли Вам интересно узнать, как эти темы стали для меня важными, но случилось так, что мне пришлось иметь дело с множеством крупных экспериментов, частично сельскохозяйственных, но в основном в экспериментальной пивоварне. Сельскохозяйственные (и по существу почти все) эксперименты естественно потребовали решить проблему среднего/стандартного отклонения, а экспериментальная пивоварня интересуется такими темами, как связь между анализом солода или хмеля со свойствами пива. Каждый опыт требовал работы полного дня, и их число поэтому ограничено. Здесь нужен ответ на такие вопросы как: если в небольшом количестве случаев я получаю некоторое  $r$ , какова вероятность, что действительно существует положительная корреляция выше, чем, скажем, 0, 25?*

Сообщая Фишеру 26 сентября 1914 г. о предварительном согласии опубликовать его рукопись (1915), Пирсон указал что *хотел бы видеть рукопись в расширенном виде с графиками некоторых кривых и показом изменения формы кривых плотностей по направлению к нормальному распределению при возрастании  $n$ .*

30 января 1915 г. он указал: желает,

хоть вполне сознаю, что это очень трудоёмко, составить таблицы ординат кривых плотностей величины  $r$  как только смогу заняться этим [...], если только Вы не захотите сделать это сами.

У Пирсона появились новые причины для исследования связи между распределениями для малых выборок и выражениями, полученными биометрической школой для больших выборок. Первые результаты были представлены им в редакционной статье (1915a), которая следовала сразу же за статьей Фишера (1915). Пирсон исследовал скорость, с которой распределение выборочного стандартного отклонения стремится к нормальному распределению, и заключил, что теорию вероятных ошибок можно уверенно применять при  $n \geq 25$ . Он также заявил, что наиболее разумное значение  $\sigma$ , стандартного отклонения совокупности, можно получить, когда наблюдаемое значение  $s$ , определяемое в этой книге в § 5.2 (выборочное стандартное отклонение), является модой кривой плотности, и потому

$$\hat{\sigma} = s\sqrt{n/(n-2)}.$$

В примечании к статье Soper et al (1917) авторы сообщили, что Госсет указал, что наилучшее значение  $\sigma$  соответствует максимуму кривой плотности относительно изменения  $\sigma$  и что, следовательно,

$$\hat{\sigma} = s\sqrt{n/(n-1)}.$$

Он, очевидно, основывался на моде апостериорного распределения  $\sigma$  при равномерном априорном распределении, однако Пирсон считал, что предположенная равномерность *не соответствует опыту*.

Письмо Госсета Пирсону 1 сентября 1915 г. показывает, что они продолжали расходиться во мнениях по этому вопросу:

*Не опасайся я тратить Ваше время, я бы воевал с Вами по поводу априорной вероятности и предоставил бы Вам выбор оружия. Но я не думаю, что наступила моя очередь [приводить доводы], я ведь описал свои соображения в предыдущем письме и вряд ли сумею многое добавить. Вот, грубо говоря, что я тогда написал.*

*Если  $y = \varphi(x)$  – распределение априорной вероятности того, что  $x$  – стандартное отклонение, то (поймите в виду, что я лежу в постели), Вы можете легко вывести моду апостериорного распределения, если  $s$  определено по одному испытанию. Я выписал то, что считал искомым значением, но забыл его. Но всё зависит от  $\varphi(x)$ , и мне думается, что это  $\varphi(x)$  обычно является довольно пологой кривой, в противном же случае Ваше значение  $s$  не будет, по правде говоря, весомо. Я хотел бы испробовать один или два вида  $\varphi(x)$ , начиная с  $C$  до, скажем,*

$$\exp[-(x - s')^2/2\sigma^2]$$

и посмотреть, что при этом получится, но боюсь, что мой анализ не сможет справиться с этим.

Я, конечно, понимаю, что, имея определённый ряд [значений], чаще всего можно надеяться указать моду, но суть в том, что другой ряд может настолько вероятнее оказаться виновником всех хлопот, что какое-то значение, не являющееся модой, будет вероятнее, чем мода первого ряда. Но всё это ясно Вам и без моего вторичного описания.

Мы увидим, что Госсет подтвердил свой довод о равномерном априорном распределении в письмах К. П. 6 июля 1917 г. и Фишеру 3 апреля 1922 г.

Расширение рукописи Фишера, предложенное Пирсоном, было действительно очень трудоёмко, и Пирсон привлёк для этой цели несколько человек<sup>3</sup>. 4 ноября Фишеру сообщили о достигнутом успехе, а 13 мая 1916 г. Пирсон смог написать ему, что *вся работа с корреляцией закончилась прекрасно*. После окончания этого громадного труда, выполненного в перерывах между военными исследованиями, её публикация задержалась ввиду финансовых проблем. В конце концов результаты появились в *Биометрике* (Soper et al 1917). Вот окончание Введения; уравнение (iv) это распределение плотности  $r$  по Фишеру:

*Ясно, что для определения подхода к приближениям Сопера и в конечном счёте к нормальной кривой при возрастании  $n$  нам требуются выражения для моментов (iv), а с практической точки зрения следует табулировать ординаты (iv) при слишком малых значениях  $n$ , для которых формулы Сопера не обеспечат должной аппроксимации. Таковы цели этой статьи.*

В параграфе 8 статьи определяется наиболее правдоподобное значение корреляции в выборке, за которое принималась мода апостериорного распределения. Но авторы указывали, что равномерное априорное распределение не годится для корреляций, и вот на это обстоятельство указывал Госсет в письме Пирсону 6 июля 1917 г.

*Просто несколько слов, чтобы сообщить, что пришла Биометрика и передать Вам моё почтительное восхищение совместной работой Soper et al (1917). Какой оползень произошёл, когда я начал свою игру с малыми числами! Я не вполне уверен, что полностью согласен со всем, что сказано о Бейесе и хотел бы сформулировать три пункта.*

1. По поводу замечания на Вашей с. 353. Очень приятно посмеиваться над бесконечностью и нулём, но ведь эти величины фактически не входят ни во что. Определяя максимум, практически принимают во внимание лишь те интервалы, которые вероятно приведут к нему\*, и все они, очевидно, расположены совсем близко к  $\Sigma$ , если, конечно,  $n \neq 2$ . И кстати: что произойдёт с вашими формулами, если  $n = 2$ ? Заметьте также, что хоть вы говорите о предшествующем опыте, но не используете его, когда принимаете, что

$$\sigma = s\sqrt{n/(n-2)} \Sigma.$$

*Я не вижу какво Ваше философское обоснование для обращения этого.*

*2. То, что вы говорите об априорной вероятности получения низкой, а не высокой корреляции, относится к высшему разряду соображений. Но я не уверен, что легко применить знание подобных корреляций без нарушения независимости рассматриваемого результата (см. ниже). Но нельзя ли сравнить различные априорные распределения неравного незнания? Думается, что мы могли бы исключить кривые типа U, но если принять  $\phi(p) = 1 - p^2$  или  $(1 - p^2)^2$  или даже  $(1 - p^2)^3$ , мы получили бы распределения незнания, более соответствующие корреляции в целом, т. е. незнания об определённой теме, а не корреляции в целом.*

*3. Ущерб при использовании фактического знания о подобной работе состоит в том, что вы нарушаете независимость своей работы. Вы имеете какой-то результат, и что же вы хотели, чтобы он означал? Конечно, лучше быть в состоянии сказать “Исходя из нашего общего опыта коэффициента корреляции, совокупность, выборка из которой здесь перед нами, вероятно имеет коэффициент корреляции 0,58, но это намного выше, чем в среднем для подобных совокупностей, т. е. примерно 0,40”, чем заявить “Объединяя наше знание аналогичных совокупностей с полученным только что результатом, получаем, что рассматриваемая совокупность вероятно имеет коэффициент корреляции около 0,45”.*

*Во втором случае вы в такой малой степени принимаете во внимание ту работу, которую конкретно исследуете, и так существенно основываетесь на работах, которых нет перед вами.*

*\*Всё, что требуется для этого, это кривая распределения незнания с эксцессом много меньше нормального с модой возле  $\Sigma$ .*

Соавторы совместной статьи, к сожалению, не разобрались в методе Фишера определения приближённой оценки коэффициента корреляции по абсолютному критерию. Они ошибочно заявили, что его уравнение было выведено по теореме Бейеса при равномерном априорном распределении и критиковали выбор этого распределения. Их ошибка могла происходить либо от убеждения в том, что наиболее разумное значение параметра это мода апостериорного распределения, либо от формулировок Фишера. Он описал свою оценку как вероятнейшее значение, а при ответе на доводы Kirstine Smith (1916) против максимизации плотности вероятности в черновой записке<sup>4</sup>, посланной Пирсону в июне 1916 г., описал свой абсолютный критерий как полученный из принципа обращённой вероятности.

Какова бы ни была причина [ошибки], Фишер (1921) совершенно ясно обрисовал свою точку зрения, указав, что его метод не основан ни на каких предположениях о распределении вероятностей истинного значения коэффициента корреляции<sup>5</sup>. В одном из примеров совместной статьи 1917 г. рассмотрена выборка 25 наблюдений при оценке смешанного момента, равной 0,6, уменьшенной до 0,59194<sup>6</sup> равномерным априорным распределением и

до 0,46225 при выборе другого априорного распределения, признанного более подходящим. Теми же данными Фишер иллюстрировал своё преобразование  $r = thz$  и заметил, что 0,462 лишь на 0,002 превышало априорное среднее.

3 апреля 1922 г. Госсет подтвердил получение оттисков статей Фишера (1921; 1922а) и снова возразил против априорных распределений, отличных от равномерного:

*В 1907 г., будучи в лаборатории [Пирсона], я старался выработать варианты Бейеса с априорными вероятностями, отличными от  $G = C$ , но вскоре убедился, что при выборках обычного объёма априорная гипотеза приводит фактическую выборку к нелепости (как это и обнаружили авторы совместной статьи), и с тех пор отказался от всех гипотез, кроме той, которая приводит к Вашему правдоподобию (где я в состоянии справиться с математикой), и тогда каждое наблюдение [каждая выборка?] может быть исследовано отдельно.*

Для проницательного Госсета было типично, что он заметил, что можно сочетать независимые правдоподобия, но не независимые апостериорные вероятности, если только они не совпадают с правдоподобиями.

Письмо Госсета 6 февраля 1911 г. упоминает коэффициенты ранговой корреляции, которые предложил Спирмен (Spearman 1904) и описал Пирсон (1907) под названием *метод количественного анализа* (method of assay):

*Я изрядно занимаюсь методом ранговой корреляции. Мои выборки невелики (8 случаев [наблюдений в выборке?]), но их довольно много (12), так что средние представляют собой первые приближения. Точность характеристик [параметров] различна, начиная от процентов с двумя значащими цифрами до отличий между двумя оценками липкости (вязкости?) хмеля или двух групп мнений о горькости пива. Некоторые результаты (средние) очень неплохи по сравнению с полученными должным образом из выборок большого объёма, так что можно достаточно доверять и другим выборкам.*

*У меня 17 характеристик, но я не рассматривал всех сочетаний, и нахожу, что громадное преимущество метода состоит не в том, что экономить время, необходимое для отдельных характеристик, а в том, что, выбрав несколько характеристик, можно добавлять новые, колонка за колонкой, и вычислять все разности и возводить в квадрат на других листках. Идеально быть может было бы иметь бумагу в полосках с указанием номеров рангов и сочетать эти полоски друг с другом для подсчёта корреляций.*

*Я замечаю, что при многих совпадениях (ties) формула должна быть видоизменена, потому что стандартное отклонение множества рангов с совпадениями меньше, чем для рангов без совпадений. Указанная ниже поправка может быть ошибочна, но во всяком случае она не изменяется, если изменить порядок [ранжирования] одной из характеристик.*

Эта поправка появилась в отчёте пивоварни за 1911 г. и привела к существенной статье Госсета (1921), в которой он вновь

использовал данные эксперимента с выборками 1907 г. 13 декабря 1920 г. Госсет прочёл предварительный доклад обществу биометристов и математических статистиков.

**4.3. Временные ряды.** К концу XIX в. возникла проблема соотношения одновременного движения двух временных рядов. Точные методы анализа можно было разработать после открытия корреляции, и в двух статьях Hooker (1901a, 1901b) соответственно наметил два основных метода, впоследствии вошедших в употребление.

В первой статье он корректировал брачность и коммерцию, определяя корреляцию их уклонений от трендов, установленных по девятилетним периодам. Во второй статье автор предложил корректировать разности цен в последовательных сутках, и ту же идею сформулировала Cave-Browne-Cave (1904) для отчётов по барометру [в различных пунктах]. Этот подход стал известен под названием *метод последовательных конечных разностей* (variate difference correlation method)<sup>7</sup>. Его исследовал Hooker (1905), который заключил, что [введение] корреляции разностей полезно при изучении сходства между быстрыми изменениями без видимой периодичности.

Госсет посетил Пирсона в июле 1905 г. Вернувшись в пивоварню с указаниями на литературу по корреляции, он начал изучать связь между анализом солода и кислотностью пива, исключая притом температурные влияния вычислением первых разностей. Работая в биометрической лаборатории во время своего годового научного отпуска, он обсуждал корреляцию первых разностей с Пирсоном, который заявил, что этот метод пригоден лишь для линейных соотношений. Дальнейшие подробности деятельности Госсета в этом направлении указаны в автобиографической части его письма Фишеру 15 декабря 1918 г.:

*2. Когда капризы лабораторных исследований и экспериментов в крупном масштабе привели меня к изучению теории ошибок и потому к Пирсону, я около года заведовал нашей экспериментальной пивоварней и старался вникнуть в различные рекомендованные им статьи. Пришлось искать связь между лабораторным анализом солодов и периодом, в течение которого полученное пиво оставалось пригодным по своей кислотности; если Вы когда-либо пили пиво Гиннес в Англии [не в Ирландии], то поймите, в чём дело.*

*Но одним из основных факторов образования кислотности является температура (и в пивоварне, и при хранении), а в то время наши меры по обеспечению постоянства температуры были довольно примитивны. И поэтому мне пришлось вычислять первые разности между последующими варками (т. е. днями, потому что каждая варка занимала целый день), чтобы исключить существенное влияние температуры.*

*3. После этого фирма послала меня на год к Пирсону, и я прошёл через его обычный курс и кроме того попробовал решить свои собственные скромные проблемы небольших чисел [выборки], которыми Вы позднее так успешно занимались. В то время я сообщил Пирсону о методе первых разностей, и он показал мне,*

что при случайных наблюдениях  $r_{\Delta a \Delta b} = r_{ab}$ , но отрицал возможность исключения влияния времени: если только не иметь дела с линейными отношениями по времени, то влияние времени всё ещё будет сказываться на первых разностях.

Изучая наблюдения [растений] на полевых участках и проводя лабораторные исследования, Госсет понял, что практически существует склонность к корреляции между наблюдениями, близкими во времени или в пространстве. Исключение долгопериодических изменений продолжало интересовать его в течение примерно семи лет после возвращения в Дублин. В письме Пирсону 9 ноября 1908 г. он описывает свою работу:

*Первым шагом в преодолении трудности было принятие времени в качестве третьего переменного и корректирование его с теми переменными, чтобы определить частную корреляцию*

$$\rho_{12} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}.$$

*Но мои корреляции со временем редко были линейными, и, конечно, их никогда нельзя считать случайными, так что я не всегда вывожу очень уж полезные результаты. Затем я попытался пойти по пути Гукера (или своим собственным путём, поскольку он мог помочь мне) и корректировал последовательные разности между переменными и фактически определяя*

$$R_{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}.$$

*Это почти обеспечивало частную корреляцию, если регрессия линейна, хотя, конечно, любое одностороннее изменение должно отразиться в корреляции. Трудность здесь в основном в обработке. Я записал все свои результаты на карточках, но очень легко ошибиться при вычислении разностей. (И вероятная ошибка довольно велика.) Я исследовал и третий путь. Он не труден, и, если не ошибаюсь, иногда приводит к цели, но он всегда указывает более низкое значение, чем частная корреляция. Состоит он в [пропуск в книге]. Боюсь, что моё описание не слишком понятно. Во всяком случае, метод Гукера является для меня наилучшим, но хотелось бы знать, прав ли я по поводу остальных.*

8 декабря 1910 г. он предложил иной подход:

*В общем, корреляция ослабляется при увеличении единицы времени или пространства, и я не могу не предположить, что было бы прекрасно вывести закон этого вероятного ослабления. Пришлось бы, конечно, ввести какие-то произвольные допущения о, так сказать, распределении корреляции, но я не могу придумать никакого разумного предположения.*

После этого Госсет исследовал влияние корреляции в пространстве по данным А. D. Hall<sup>8</sup> из Ротамстеда, сельскохозяйственного экспериментатора несколько сомнительной репутации. К концу 1912 г. Госсет усилил свою работу в этой области, и его результаты описаны в письмах 12 и 18 сентября и 13 октября. Он применил метод последовательных конечных разностей для изучения корреляции смертности от туберкулёза и младенческой смерт-

ности; брачности и средней зарплаты; и отчёты расчётной палаты и индексы Sauerbeck. В этих письмах Госсет выражает естественное удовольствие своими успехами и объясняет свои поиски примеров в экономике, данные о которой он получил от своего коллеги Эдуарда G. Peake<sup>9</sup>.

*Если взять вторые разности и корректировать их, то мы узнаем, достигли ли первые разности своей цели. В таком случае они должны приводить к тому же результату. Я попробую. Это в некоторой степени находка. ...*

*Вы, конечно, вспомните, что этот метод впервые опубликовал Гукер, который назвал его корректированием разностей от моментного среднего, и он, пожалуй, довольно очевиден. Я принял его в соответствии со своей собственной идеей не позже, чем через 6 недель после того, как Вы мне впервые сообщили о корреляции. Во всяком случае, я должен применять что-то подобное вновь и вновь. [...]*

*Исключение долгопериодических изменений в экспериментальной работе это то, что, конечно, интересует меня, но кроме изменений от одной точки в поле до другой никакая моя работа не может быть опубликована, и поэтому я принимаюсь за экономические данные.*

Дружественное письмо Пирсона от 17 сентября 1912 г. содержит вдумчивые комментарии о ложной корреляции и вопросы, имеющие целью пояснить анализ данных о туберкулёзе и чахотке, но другие его ответы навсегда утеряны. О взглядах Пирсона можно что-то узнать по письму Госсета Фишеру 15 декабря 1918 г., в котором он вкратце описывает этот период, но показывает, что встал на независимый путь.

*4. И я оставил это на несколько лет без движения, применяя при необходимости этот метод в качественном отношении вплоть до публикации статьи Peake в Banker's Magazine, ибо методы, за которые я был косвенно ответственен, привели меня к более полному исследованию темы, чтобы защитить его от К. П., и результатом была статья в Биометрике, на которую Вы сослались.*

26 января 1914 г. Госсет послал рукопись Пирсону с сопроводительным письмом, и она была опубликована в том же году (1914). Письмо содержит искушающий комментарий о роли Пирсона.

*Заметьте также, что автором был на самом деле Гукер, моя же роль была лишь в том, чтобы послужить наковальней, на которой Вы ковали Гукера.*

Госсет показал, что если каждый из двух временных рядов состоит из суммы многочлена, зависящего от времени, с постоянными коэффициентами и случайной ошибки, не зависящей от времени, то корреляцию случайных ошибок можно оценить, вычисляя последовательные разности в каждом ряду, пока для корреляции разностей не окажется устойчивого значения. Публикация статьи была задержана ввиду  $(n + 1)$  других обстоятельств.



Тем временем Оскар Андерсон, ученик Чупрова в Петербурге, в 1911 г. представил свою дипломную работу о корреляционном анализе временных рядов и независимо установил в общем виде метод последовательных конечных разностей. Он применил ожидания для определения дисперсий разностей и коэффициентов корреляции и 9 июня 1914 г. отослал Пирсону свою рукопись. Сопроводительное письмо он с братом написал по-английски, но Пирсон ответил по-немецки, и притом привёл характеристику Госсета: *Стьюдент не профессионал, и я думаю, что Вы придаёте его словам слишком большой вес*<sup>10</sup>.

Статья Андерсона была опубликована (1914) в том же выпуске *Биометрики*, что и статья Cave & Pearson (1914) с численными примерами о десяти экономических индексах итальянского благосостояния за 1885 – 1912 гг. Вся эта деятельность привлекла внимание Фишера (1916). Он положительно отозвался о Стьюденте и выразил мнение, что метод последовательных конечных разностей очевидно *имеет большое будущее*.

Впрочем, при его тогдашнем применении этот метод не учитывал трудностей, возникающих от существования корреляции с запаздывающим аргументом. По этой причине его критиковал Wapen M. Persons (1917). В конце 1918 г. Фишер послал письмо Госсету, которое, видимо, описывало эти затруднения. Госсет ответил 15 декабря с автобиографическими подробностями (см. выше) и выразил сомнение в применимости указанного метода в статистике населения и экономической статистике.

*Когда Пирсон опубликовал своё итальянское письмо [см. чуть выше], мне, признаться, стало несколько не по себе. Мне казалось, что он слишком высоко оценил этот метод. А когда он впоследствии прислал мне для рецензирования две рукописи, критикующие этот метод, я почувствовал, что отстал и отказался бы, даже если моя анонимность позволила бы мне предаться спорам. Одна из этих рукописей, если не ошибаюсь, обсуждала смертность младенцев на первом, втором, ... году после рождения, и этот спортсмен утверждал, что ввиду эпидемических заболеваний существует двухлетний период смертности во всех ранних возрастах. Затем он начал рассуждать о синусоидах, амплитудах и других темах, с которыми у меня не было достаточного опыта. Во всяком случае, я написал Пирсону, сказав, что не знаю, как избавиться от этого двухлетнего периода вычислением разностей и на этом покончил.*

*После получения Вашего письма я думал о нём, и мне кажется, что в применении метода последовательных конечных разностей к обычной статистике населения имеется два слабых места. Я стал сомневаться, будет ли он когда-либо применяться кроме как для первых разностей, что я полагаю законным и полезным. Они оба [слабые места?] зависят от принятого предположения о том, что  $r_{a_1a_2}, r_{b_1b_2}, r_{a_1b_2}, r_{a_2b_1}$ , и т. д. пренебрегаемы или равны нулю.*

*Ясно, что годовые (или даже месячные) статистики населения и экономические статистики не схожи с лабораторными наблюдениями (на которые также влияют время), ибо первые являются результатами суммирования периодов, а вторые –*

отдельными результатами. Вариации таких сумм могут быть вызваны только “причинами”, более или менее действующими в течение соответствующего периода, и лишь случайно они внезапно изменились бы в концах таких периодов. И поэтому последовательные периоды (годы) коррелированы вполне независимо от общего тренда, для избавления от которого был придуман метод последовательных конечных разностей. И стало быть  $r_{a_1a_2}, r_{b_1b_2}$  и т. д. вообще говоря вовсе не пренебрегаемы, так же, как и  $r_{a_1b_2}$  и т. д.

Госсет далее предложил, как исследовать временные ряды волнообразной формы, а его краткие комментарии в письме Фишеру на две недели позже оказались рубежом, после которого метод последовательных конечных разностей исчез из его переписки.

На заседании Королевского статистического общества 1921 г. Юл прочёл доклад, в котором критиковал статьи Госсета и Андерсона и высказался за возвращение к методу Гукера коррегирования уклонений от тренда. При обсуждении доклада Мейджор Гринвуд поддержал работу Госсета, но Фишер указал на осложнения при наличии корреляции с запаздывающим аргументом. Позднее он (1924b) убеждал, что при коррегировании остаточных членов временных рядов лучше всего начинать с применения выравнивающих многочленов. Этот совет Фишер повторил в своей книге (1925, § 37).

**4.4. Дискретные распределения.** В своей первой статье Госсет (1907) изучал распределение дрожжевых клеток и кровяных шариков в тонком слое жидкости, находящейся на сетке квадратов и подсчитывал число [клеток и] шариков на единицу площади. Госсет получил то, что он назвал экспоненциальным рядом в качестве предела биномиального распределения при большом числе единичных квадратов. Он сравнил два распределения и показал, что экспоненциальный ряд стремится к нормальному при возрастании числа частичек в единичном квадрате к бесконечности.

Эти теоретические рассуждения были испытаны на четырёх распределениях частот, полученных при подсчёте по всем 400 квадратам прибора, и согласие было признано [он признал] удовлетворительным. Госсет заметил, что биномы лучше соответствуют наблюдениям, чем экспоненты, и указал, что этого и следовало ожидать, потому что было необходимо оценить ещё одну константу. Его наблюдения были окончены задолго до того, как критерий хи-квадрат был видоизменён введением *степеней свободы*. Но он не знал, что его экспоненциальный ряд был по существу распределением Пуассона, история теории и применения которого насчитывала 70 лет<sup>11</sup>.

Интерес Госсета к дискретным распределениям возник вновь после обнаружения в лаборатории Сэра Almroth Райта того, что способность белых кровяных шариков поглощать чужеродные организмы зависит от присутствия опсонина в плазме крови. Способность опсонина определялась числом бактерий на лейкоцит, и отношение этого значения в сыворотке крови пациента к

той же величине в нормальной сыворотке определяет опсонинный индекс. Со статистической точки зрения оценку этих индексов впервые обсуждали Greenwood & White (1909). Они представили несколько распределений частот количества бактерий в фагоцитах и вывели распределения средних в малых выборках. Они испробовали кривые Пирсона I и V типов и заключили, что не только совокупности, но и средние имели асимметричные распределения.

Госсет посчитал этот последний вывод удивительным и попытался (1909) пояснить его на основе гипотезы о homotyposis. В 1901 г. её предложил Пирсон для пояснения некоторых сторон наследственности, и в соответствии с ней члены выборки более схожи друг с другом, чем остальные члены совокупности. Пусть в выборке объёмом  $n$  каждый элемент имеет дисперсию  $\sigma^2$ , а коэффициент корреляции между любыми двумя членами равен  $\rho$ . Далее, дисперсию среднего выборочного обозначим через  $M$ . Тогда, как показал Госсет,

$$M = \sigma^2 \frac{1 + (n-1)\rho}{n}.$$

Подсчитав третий и четвёртый моменты, он заключил, что распределение среднего выборочного стремится к нормальному менее быстро, чем в случае  $\rho = 0$ .

В своей второй статье Greenwood & White (1910) в основном изучали распределения средних в выборках объёма 25, 50 и 100 из выборки в 20 000 фагоцитов. Распределение оказалось заметно асимметричным, но авторы посчитали, что homotyposis не мог сам по себе привести к этому. В письме Пирсону 8 декабря 1910 г., рассматривая корреляцию между последовательными во времени или в пространстве элементами, Госсет отклонил их точку зрения.

*Тот же вид проблем встречается в работе об опсоновом индексе, в которой, вопреки Гринвуду, эксцентриситет распределения их средних из 25, 50 и 100 элементов должен быть вызван какой-то корреляцией в пространстве и/или во времени. Это, конечно, не простой вид корреляции, который я предположил в своей статье, но факты нельзя объяснить иначе, чем какой-то корреляцией между элементами выборки. Странно и примечательно, что это такой вид корреляции, который влияет на асимметрию и эксцесс больше, чем на изменчивость. Неожиданный ком схожих фагоцитов на предметном стекле или полчаса наблюдений под микроскопом быть может покажут подобный результат.*

Примерно в 1912 г. в биометрической школе узнали о работе Пуассона и Борткевича<sup>12</sup>. Soper (1914) опубликовал таблицу членов ряда

$$e^{-m}(1 + m + m^2/2! + m^3/3! + \dots),$$

а Lucy Whitaker (1914) исследовала пригонку положительных и отрицательных биномов и рядов Пуассона ко многим сериям

данных<sup>13</sup>. Она поблагодарила Пирсона за *помощь на различных стадиях*, а её острый стиль свидетельствовал о его влиянии. Она критиковала предшествовавшие аппроксимации распределения Пуассона и в частности указала, что некоторые поясняющие данные, которые Госсет применил в 1907 г., согласуются с отрицательными значениями бинома с параметром  $q$ . Письмо Госсета 26 августа 1914 г. показывает, что с апреля он как-то (на словах или письменно) обсуждал с Пирсоном её статью.

*То, что Вы говорите о распределении Пуассона, конечно же, верно, но если оно не начинается с нуля, то является белой вороной, и я как-то не вижу, как оно возникает. Во всяком случае, оно не возникает из гемоцитометра. Я, конечно, не должен был называть отрицательное  $q$  критерием, но фактически большинство отрицательны; положительные в некоторой степени естественно получаются у Вас при небольших значениях  $n$  из неперемешанной совокупности.*

К. Пирсон (1915b) опубликовал статью о сложных распределениях частот, компоненты которых могут быть описаны биномиальными рядами. Он начал с дискретной смеси биномиальных распределений  $Bi(n, q_s)$  при  $s = 1, 2, \dots, n$ , и, приравнявая моменты, аппроксимировал их биномом  $Bi(k, Q)$ , привёл предельные выражения для  $Q$  и  $k$  при  $q_s \rightarrow 0$  и  $nq_s = t_s$  и обнаружил, что  $Q < 0$ .

*Таким образом, если два или более рядов Пуассона соединяются почленно, начиная с первого, то объединение всегда окажется отрицательным биномом. Эту теорему мне впервые указал Стьюден. Он предложил её в качестве возможного объяснения отрицательных биномов, появляющихся в данных, которые теоретически должны подчиняться закону малых чисел, например, в данных собственных подсчётов Стьюдента по гемоцитометру.*

Впрочем, Пирсон, видимо, понял, что не представил полностью предложения Госсета, и, кажется, извинился за упущение. Письмо Госсета 15 февраля 1916 г. упоминает это и в типичной для него манере заявляет, что ни в коем смысле не был задет и был заинтересован лишь в том, чтобы *дело было сделано должным образом*. Он далее кратко комментирует своё выражение 1907 г.  $0,67449\sqrt{N}$  и обсуждает отношение статьи Пирсона к своему исследованию различных форм  $y = f(m)$  распределений вероятностей параметра Пуассона.

*Я только хотел сказать, что есть такой большой класс населения, к которому я когда-то принадлежал и в какой-то степени принадлежу и сейчас. Он не будет заниматься точными биномами (point binomials), но может считать весьма полезным знание того, что при подсчёте  $N$  элементов грубая мера их вероятной ошибки будет  $2/3\sqrt{N}$  и что было бы полезно вновь сказать это для их пользы<sup>14</sup>.*

*Далее, хоть у меня есть весьма неплохие основания считать, что для подобных распределений, вообще говоря, можно ожидать кривую типа III, должен признаться, что безуспешно испробовал кривые V и VI, поскольку интегралы очень скоро вышли из-под контроля. Но это никак не относится к делу,*

потому что Вы показали, что форма функции  $y = f(t)$  не имеет значения ещё до того, как я только занялся этим. Но я посмеиваюсь, и воображаю, что Вы разделяете мою забаву над тем, что исследовал определённую форму  $y = f(t)$ , тогда как Вы всё сделали для любых форм этой функции, а именно Ваше  $Q[\dots]$  или в моих обозначениях  $-\sigma^2/M$ .

И теперь я не уверен, что Вы в конце концов видели всё это, или, по крайней мере, осознали всю значимость этого. Вы ведь допускаете, как сообщили в письме, что “неопределённо большое число совершенно смешанных пуассоновых совокупностей, подчиняющихся любому закону частоты, могут практически применяться для описания любой частоты”. Но отсюда непременно следует, что, взяв равномерные выборки в пространстве или времени из любой подобной совокупности, Вы должны будете получить отрицательные биномы, что я и хотел показать, кроме редкого случая, когда  $\sigma$  для  $y = f(t)$  равно нулю, – тогда Вы получите Пуассона.

Вы, вероятно, скажете мне, что фактически Вы получили положительные биномы, что, конечно, покажет, что цитированное мной положение не всегда справедливо, но я не думаю, что существенно положительные биномы в какой-то степени распространены. И если Вы рассматриваете, как образуются смеси либо во флягах, либо, скажем, в городах, то это происходит постепенным утончением слоёв (Вы [, ведь,] наблюдали полоски в сиропе при его разбавлении водой). И по мере утончения слои постепенно смешиваются, но мне представляется, что образ смеси смешанных совокупностей подходит, и думается, что в этом очень хорошее объяснение отрицательных биномов.

Если Вы предпочтёте рассуждать подобным образом, то нам и следует ожидать отрицательных биномов, причём Пуассон это предельный случай отрицательного бинома, а  $-\mathcal{Q}$  – это мера несовершенства в смеси рассматриваемой совокупности, несовершенства техники, если Вы предпочтёте сказать так. Я думаю, что мы совершенно согласны в этом, разве только я считаю отрицательный бином необходимостью, а Вы – удобством, но, конечно, мой взгляд обеспечивает мне лучшее понимание, равно как Ваш придаёт Вам лучшую идею.

Госсет (1919) в конечном счёте сформулировал некоторые свои взгляды на эту тему. Эту статью он, видимо, послал Пирсону в конце 1918 г. В письме 1 февраля 1919 г. Госсет сообщил, что ждёт корректуру, вернул же он её вместе с письмом 28 февраля. Он ввёл несколько ключевых предпосылок для распределения Пуассона и указал, что

*если различные подразделения имеют различные шансы включать элементы, или если включение элемента в какое-либо подразделение повышает шанс другого элемента попасть туда же,*

то отрицательное биномиальное распределение лучше всего выразит [экспериментальные] числа.

В статье ничего не было сказано о непрерывной смеси распределений Пуассона, но письмо Фишеру 30 декабря 1918 г. показывает, что Госсет исследовал выбор кривой Пирсона типа I в качестве  $f(m)$ .

*Кратко сообщая, что обновлял пуассонов закон малых чисел. Мисс Уитекер была, видимо, последней [из тех, кто обновлял]. Она показала, что вся статистика (включая даже дрожжевые клетки Госсета!) была безнадежно не пуассонова и в раздражающей форме приводила к отрицательным биномам. Это происходит либо от смеси, либо от корреляции. Смесь элементов, когда шансы элементу попасть в то или иное подразделение не всегда совпадают, не является действительно осязтым, если только у некоторых элементов этот шанс действительно не осязтим, — тогда, конечно, мы получаем положительное биномиальное распределение. С другой стороны, смесь подразделений, когда шанс подразделению включать элементы изменяется, имеет значение и приводит к отрицательному биномиальному распределению.*

*Числами являются, если обозначить  $m = nq$  для каждого подразделения и через  $v_1, \mu_2$  моменты распределения частоты подразделений с 0, 1, 2, ... элементами*

$$v_1 = \bar{m}, \mu_2 = m + \sigma_m^2 \text{ и т. д.}$$

*Корреляция, конечно, приведёт к положительному или отрицательному биномиальному распределению в зависимости от того, уменьшает ли она или увеличивает разброс. И вот сейчас мне захотелось узнать, не смогли бы Вы объяснить распределение фагоцитов опсонистов (phagocytes of the opsonists), предположив, что они являются подразделениями с неравными шансами пожирания бактерий.*

*По этой причине я посмотрел фундаментальную статью Гринвуда и кого-то, которые сосчитали 20 000 фагоцитов и по моментам их распределения установил первые четыре момента величин  $m$ , которые могли бы привести к их результату. Эти моменты разумны в том, что приводят к  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , равным примерно 0,9 и 3,2 и к области, в которой нет отрицательных  $m$  (тип I)<sup>15</sup>. И затем я вновь получил их подсчёт фагоцитов по своей кривой величин  $m$  и сразу же подошёл к интегралу, вычислить который не смог, хоть полагаю, что он как-то близок к Г функциям*

$$\int_{0,1991}^{9,4572} e^{-m} (m + 1,5676)^r (1 + m/0,1991)^{0,0492} (1 + m/9,4592)^{2,3383} dm.$$

*Здесь  $r$  — целое число; умножение этого интеграла на подходящую константу, которую я могу отыскать в справочнике, должно доставить число фагоцитов в первоначальном распределении с  $r$  бактериями. Не смогли бы Вы сообщить мне, существует ли разумное решение, а если существует, то каково*

оно? Я буду в какой-то степени доволен, даже если это возможно только для  $r = 0$ .

В письме Пирсону 1 февраля 1919 г. Госсет продолжает исследовать данные Гринвуда и Уайта, но сообщает о теоретической безуспешности.

После моего последнего письма я исследовал это распределение 20 000 лейкоцитов Гринвуда. Вы безусловно помните, что он пытался подобрать к нему непрерывную кривую, но достиг немногого, поскольку хи-квадрат оказался равным 83 и  $P$  очень небольшим нулём (!). Он, далее, начал объяснять неудачу, что всегда казалось мне странным. Он лишь постарался подыскать кривую с теми же моментами, что и для наблюдаемого распределения, и даже вдобавок к тому, что он подгонял непрерывную кривую к разрывным наблюдениям, у него не было никаких причин отыскивать недостатки в своих наблюдениях.

Я полагаю, что искомое распределение является смесью лейкоцитов с различными значениями  $t$ , что указывает либо на различную способность поглощения бактерий, либо на различные возможности для этого, либо на то и другое совместно. Затем я определил первые четыре момента величин  $t$ , построил кривую (типа I), отсчитал частоты в группах по 0,3 и при помощи таблиц Пуассона (думаю, таблиц Сопера) в Биометрике вновь построил первоначальное распределение лейкоцитов. Получилось не слишком хорошо: хи-квадрат снизился только на 10, до 73, но мне сразу же пришло в голову (я читал литературу), что, поскольку моя кривая, которая вовсе не была J-образной, резко возрасла примерно при 1,7, наличие мёртвых лейкоцитов было невозможно (в литературе указывались такие случаи, но чисел там не было).

Я предположил 500 мёртвых, исключил их из нулевой группы и повторил свои выкладки. Хи-квадрат упал до 27, а  $P$  выросло до 0,04. Аналогичное улучшение несомненно произошло бы и при непрерывной кривой. Я сделал ещё две попытки, предположив 350 и 400 мёртвых и во втором случае снизил хи-квадрат до 25,3 и получил  $P$ , равное 0,065. Но поскольку 9 в хи-квадрате было в одной группе, а  $P$  примерно там же возрасло довольно быстро, я уверен, что очень хорошая подгонка окажется где-то между принятыми 400 и 450 мёртвыми лейкоцитами. Две последних кривых  $t$  были изуродованными фигурами J типа I, чего я раньше не знал, с бесконечной частью чуть больше двух и пальцем ноги около восьми.

Мне показалось, что это соответствует предположению о том, что при предварительном кровообращении (preliminary circulation) все живые лейкоциты имели шанс вбирать бактерии, выраженные величинами  $t$ , чуть превышающими 2, но что те, которые сразу же завершали своё дело, больше и не вбирали, а вот позднейшие ребята доходили до значения  $t$ , равного восьми. Рассуждение было бы гораздо проще, будь возможно проинтегрировать

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-x} x^r \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2} dx.$$

Но от Фишера, которому я об этом сообщил в письме о его корреляциях разностей, я узнал, что этот интеграл не берётся. Сам я должен был бы надеяться на что-то изящное, выраженное в Г функциях.

Эту же тему Госсет обсуждал в письме Пирсону 28 февраля 1919 г. и комментировал практические подробности экспериментирования, но ничего статистического не добавил. Задачу решили только Greenwood & Yule (1920), которые представили  $f(m)$  кривой Пирсона типа III и строго вывели отрицательное биномиальное распределение.

**4.5. Комментарии и критика.** Госсет занялся сельскохозяйственными опытами около 1905 г., когда прикомандированный к фирме Гиннес мастер по солодовым напиткам Бивен, экспериментировавший с выращиванием ячменя в клетках, попросил его совета. С этого началась их дружба, продолжавшаяся всю жизнь. Они регулярно встречались и переписывались на протяжении последующих 30 лет, в основном о проблемах планирования и анализа опытов с ячменем.

Вернувшись в Дублин в 1907 г., Госсет вряд ли мог расстаться с интересом к биометрии, а его работа обеспечивала ему достаточно возможностей расширять его. В письме 20 сентября 1908 г. он довольно подробно описал своё недавнее посещение рассадника Бивена. В основном оно было связано с работой пивоварни, но Госсет имел в виду убедить Бивена заняться экспериментами по скрещиванию ячменя для К. П. Он также полагал, что по данным Бивена сможет представить себе наследственность *чистых линий*, так что, как он надеялся, Пирсон примет соответствующую статью для *Биометрики*.

Спор между биометристами и менделистами, происшедший на конференции Британской ассоциации по продвижению науки в 1904 г. в Кембридже, несколько затих после смерти Уэлдона в 1906 г. В 1908 г. Госсет присутствовал на некоторых докладах о механизме наследственности на дублинской конференции Ассоциации. Там он встретил ирландскую помощницу К. П., Эмми Баррингтон, которую знал со времени посещения Университетского колледжа. Бэтсон неоднократно докладывал о менделевской генетике, но и Госсет, и Эмми Баррингтон полагали, что его данные не соответствовали [недостаточно] разъяснённой к тому времени простой теории Менделя.

Письмо Госсета 20 сентября 1908 г. сообщает о причинах его отклонения взглядов Бэтсона на дальтонизм, и он вновь написал 9 ноября, сообщив подробности о дальтонизме в предшествовавших поколениях своей семьи.

Биометристы интересовались также осами и пчёлами. Две статьи об осах написал обособленный Эджуорт (Edgeworth 1885, 1897). По наблюдениям в Эджуорттауне (Ирландия), Оксфорде и на площадках для гольфа в Лондоне он попытался оригинальным



методом оценить распределение времени отсутствия отдельных насекомых из своего гнезда и изменение этого времени в течение дня. Возможно, что его поощрил Пирсон, предложив представить результаты в *Биометрику*. Там действительно были опубликованы статьи об осах и пчёлах и Эджуорта (1907), и Alexander Wright, Alice Lee и K. Pearson (1907).

В письме 11 сентября 1909 г. Госсет сообщил К. П., что послал ему *ещё что-то об осах*; в конце письма от 24 апреля 1910 г. он обсудил повадки пчёл, и, наконец, в письме 16 июня 1911 г. сообщил, что послал *небольшую выборку ос в Университетский колледж*.

После смерти Уэлдона основной интерес Пирсона и программа его исследований сместились от чистой биометрии к работе лаборатории евгеники, которую финансировал Гальтон. Госсет получил экземпляры мемуаров, опубликованных в Университетском колледже, и прочёл про споры, которые стали известны прессе. В письме 24 апреля 1910 г. он упоминает статью E. M. Elderton<sup>16</sup> & Pearson (1907). Они сравнили коэффициенты сходства характеристик, основанных и на непрерывных переменных, и лишь *на широких категориях* исходных данных. К. П. обработал эти последние, вводя различные коэффициенты, например, основанные на корреляционном отношении  $\eta^2$  и среднеквадратической контингенции  $C_2$ .

Госсет выразил сомнение в том, что будет легко сравнивать степени соотношения, определяемые этими мерами, при различных количествах категорий<sup>17</sup> и объёмах выборок. На нескольких страницах он обсуждал вероятные ошибки со ссылкой на статью Blakeman & Pearson (1906).

Много споров вызвала публикация E. M. Elderton с участием К. П. (1910). Ни в одной исследованной категории они не обнаружили заметного соотношения между интеллектом, телосложением или заболеваниями потомства и пьянством родителей. Этот вывод ударил по сторонникам трезвости, которым авторы посоветовали сменить энергичную, но дилетантскую филантропию действительным познанием. Равным образом были раздосадованы экономисты и врачи. Кейнс (J. M. Keynes) опубликовал рецензию в томе 73 *J. Roy. Stat. Soc.*, после чего в томе 74 прошёл обмен мнениями между ним и Пирсоном о влиянии пьянства родителей. Письма читателей были опубликованы и в *Brit. Med. J.* и в *Archiv f. Rassen- u. Gesellschafts-Biologie*.

6 февраля 1911 г. Госсет сообщил Пирсону, что он прочёл небольшую долю *грандиозных споров о пьянстве* и предложил дальнейшие вопросы, ответы на которые могут быть получены из собираемых материалов.

*Во-первых, представляется возможным, что пьяницы, склонные к душевным заболеваниям, туберкулёзу и пр., могут умереть до того, как породят большое число детей, и могут считаться в соответствующей степени здоровыми родителями. Возможно ли это? Вторая тема относится к утверждению трезвенников о том, что "очень часто замечаешь старших вполне здоровых детей, родившихся до того, как родители*

пристрастились к пьянству, и их все более и более вырожденных младших братьев и сестёр”.

*Не отвечает ли собранный Вами материал на вопрос о том, верно ли указанное утверждение или же оно является плодом воображения? Мне представляется, что трезвенники не имеют права применять этот довод о детях, родившихся до наступления пьянства (ибо их соответствующие данные негодны), но поскольку дети пьяниц у Вас в целом немного старше детей трезвенников, то эту критику возможно следует принимать с каким-то вероятно небольшим весом.*

*Я не забываю Ваш довод о том, что дети пьяниц столь же многочисленны в группе возрастов 11 и 12 лет, как и в группе 5 и 6 лет. Но мне кажется, что пьянство и плодовитость могут происходить от одного и того же множества причин, температура и пр. и что возможно плодовитость предшествует пьянству. В любом случае априорно можно ожидать, что если верно, что плацента пропускает алкоголь, пьянство матери может повлиять на её детей в худшую сторону, равно как и при выкармливании младенцев. Было бы интересно выяснить, имеются ли корреляции между хронологическим местом в семье и интеллектом и здоровьем один и тот же знак в семьях выдержанных родителей и пьяниц.*

Другой социальной проблемой был в то время туберкулёз, и лаборатория евгеники исследовала его статистику. В письме 12 сентября 1912 г. Госсет комментировал эту тему.

*Я нахожу, что в сельских графствах Англии максимум смертности от чахотки происходит раньше, чем в городских графствах, как это имеет место и в Ирландии, которая в основном является сельской и в которой максимум смертности происходит раньше, чем в Англии.*

*Вот числа из отчёта Генеральной регистратуры за 1907 г. Думаю, что они поддерживают Вашу временную теорию, потому что инфекция должна быть менее распространена в сельских районах. Это вероятно вполне известно Вам, но представляется, что это относится к Ирландии.*

[Приведена таблица смертности на 100 000 человек в 1902 – 1906 гг. в четырёх категориях (мужчины и женщины в сельской местности и городах) в возрастах 0(5)25 и 35(10)65 лет и выше. Туберкулёз не упоминается, и несомненно указана общая смертность, поскольку числа достаточно велики. Смертность и мужчин, и женщин в сельских районах ниже, чем в городах в возрастах 0 – 15 лет и начиная с 35 лет, а в возрастах 15 – 35 лет она там выше.]

В качестве одной из его иллюстраций применения метода последовательных конечных разностей Госсет затем обсуждал связь смертности от туберкулёза и младенческой смертности. С началом войны биометрия и евгеника исчезли из переписки Госсета и Пирсона, и бремя труда, которое Пирсону пришлось выносить, было самым тяжёлым в его карьере. Одно из сохранившихся писем того периода показывает, что он всё ещё мог в то время вторгаться в новые области исследований. Зимой 1915 г.

Кирстин Смит<sup>18</sup>, будучи аспиранткой биометрической лаборатории, написала статью (1916), начав заниматься проблемой распределения опытов, и Пирсон должно быть упомянул об этом Госсету, тот же написал 7 мая 1916 г.:

1. Это зависит от типа уравнения, которое будет подгоняться к наблюдениям. Например, если есть основания считать, что это уравнение имеет вид  $y = ax^n$ , то одна-единственная точка, определённая как можно точнее при наибольшем возможном значении  $x$ , обеспечит наилучшее значение  $a$ . Это, как я думаю, следует из Вашего предположения о том, что погрешности наблюдаемых  $y$  постоянны во всей области [изменения аргумента], так что погрешность сравнительно меньше всего при наибольшем значении  $x$ . Фактически в большем числе случаев ошибки вероятно возрастают с  $x$  и будут иметь распределение в виде рога.

2. В качестве рабочей гипотезы я полагаю, что распределять опыты следует на столько же точек, сколько неизвестных в том уравнении, которое Вы собираетесь подгонять к наблюдениям. Меньшего числа точек очевидно нельзя подогнать, а большее число приведёт к тому, что Вы не сможете назначать подходящий вес в существующих точках. Например, в случае обычной параболы  $y = a + bx + cx^2$  существенными, несмотря ни на что, видимо, являются точки в середине и на концах, тогда как промежуточные мало помогут. Слабое звено здесь, конечно, в том, что не очень уж часто известно, какое уравнение получите.

Примечательно предвидение Госсетом нескольких особенностей оптимального планирования, но последующие алгебраические подробности неубедительны.

Когда я испытал этот метод при числе неизвестных более двух, то эта странная процедура, кажется, приводила к одному и тому же результату, что было нелепо, и я не могу поручиться за него.

После длинной пионерной статьи Smith (1918) прошло более 30 лет, прежде чем в 1950-е годы возродился интерес к планированию экспериментов, связанных с измерением регрессии (interest in optimal regression design). Госсету было уже 40 лет, он стал другом, который мог мягко упрекать К. П., когда замечал у своего бывшего учителя грубое поведение. Пирсон (1913) раскритиковал статью Леонарда Дарвина в *Eugenics Rev.* за июль 1913 г. не только в частном порядке и в том же журнале, но и в статье (1914), в заглавии которой упоминались те, которые недостаточно изучили тему.

Фишер<sup>19</sup> поддержал точку зрения Дарвина, но ни тот, ни другой не стал оспаривать К. П. 26 сентября 1916 г. Госсет воспользовался случаем, чтобы из Дублина высказать Пирсону свою точку зрения.

Недавно я просматривал статью о частной корреляции (Пирсон 1903) с иной целью и заметил фразу на середине с. 29, которая, видимо, указывает, что вплоть до её написания Ваше применение слова корреляция не очень отличалось от нынешнего

его применения Дарвиным. И я подумал, что, прочтя эту страницу, Вы быть может будете склонны снисходительнее отнестись к статье Дарвина.

Понятно, что было очень грубо упустить слово кровельщик (гостеприимная крыша и т. д.) после своего пребывания с Вами; пожалуйста, пусть это будет улажено. [...] Я надеюсь, что Вы это закончили без дальнейших тревожений. Я какое-то время усиленно работал, надеясь найти способ выравнивания третьих разностей, но безуспешно.

В тот же день Пирсон ответил из Лондона. Положительно отозвавшись о посещении Госсета и воспринимая его помощь как должное, он не изменил своих взглядов на утверждения Дарвина.

Это я должен был написать, но не для того, чтобы поблагодарить за Вашу помощь, потому что, видимо, нелепо благодарить за помощь в работе национального значения, а чтобы показать Вам, что я не просто позволил Вам приехать и уехать не оставив никакого впечатления. Но до нынешнего дня я продолжал работать примерно по 10 часов в день и ещё многое надо сделать. [...]

Я просмотрел тот отрывок, на который Вы сослались, и должен вновь согласиться с каждым его словом! Я, конечно, никак не считал, что селекция не влияет на корреляцию. На самом деле я думаю, что предложил формулы для определения её влияния, а майор Дарвин вначале ни слова так и не сказал о селекции. Он прямо заявил, что когда окружение не изменяется, то корреляция между ним и характером должна быть нулём<sup>20</sup>. Как я тогда выразился и как говорю сейчас, нельзя определить корреляцию по таким исходным данным. Скажи он, что определяет частную корреляцию коэффициентов окружающей среды (environment coefficients) с нулевой изменчивостью, нелепость его утверждения была бы очевидна, потому что вся изменчивость это практически существующая изменчивость.

После февраля 1919 г., когда Госсет вернул корректуру своей второй статьи о распределении Пуассона, в его сохранившихся письмах Пирсону образовался разрыв почти в шесть лет. И в последующих письмах никаких комментариев о статистической работе в Университетском колледже уже нет. [Сохранившаяся] переписка возобновилась в конце 1924 г., когда Пирсон очевидно запросил о существовании данных по пивоварению. Госсет ответил 30 ноября.

К сожалению, я не могу позволить Вам получить эти данные, если даже они устроили бы Вас, без разрешения правления.

Через месяц он, однако, послал выпуск журнала *J. of the Inst. of Brewing* за март 1924 г. с длинной статье об эксперименте с ячменем. После второго пробела с 1927 по 1931 г. начался последний этап их переписки. В основном она относилась к планированию эксперимента и критики критерия *t* Стьюдента, см. главы 5 и 6 соответственно.

## 5. Рональд Фишер

**5.1. Введение.** Статья Госсета о вероятной ошибке среднего появилась в начале его карьеры, притом тогда, когда его связи с Пирсоном были тесными. Но это направление исследований гораздо больше повлияло на Фишера, и поэтому мы начинаем здесь с этой темы.

Отношения Госсета с Фишером существенно окрепли после 1919 г., когда Фишер переехал в Ротамстед. Примерно половина писем из их переписки относится к последующим десяти годам, в течение которых большая часть опубликованных исследований Госсета относилась к планированию эксперимента, т. е. к теме, которую Фишер тогда обогатил новыми фундаментальными идеями.

Другим существенным статистическим событием 1920-х годов была публикация книги Фишера (1925с), а содействие Госсета Фишеру можно изучить по их переписке. Много внимания в ней было уделено возникшему в конце концов разногласию между ними о планировании эксперимента, хотя другие расхождения, сопровождавшиеся, правда, дружественными советами с обеих сторон, выявились ещё раньше.

**5.2. Функция распределения  $t$ .** Статья Госсета (1908а) исследовала следующую проблему.

*Обычный метод определения вероятности того, что среднее совокупности находится на заданном расстоянии от выборочного среднего состоит в том, что выборочное среднее имеет нормальное распределение со стандартным отклонением  $s/\sqrt{n}$ , где  $s$  – стандартное отклонение выборки. После этого можно пользоваться таблицей нормального распределения.*

*Но с убыванием числа экспериментов значение стандартного отклонения выборки само искажается возрастающей ошибкой, и подобные суждения могут оказаться весьма обманчивыми. [...]* Цель этой статьи состоит в определении, до какого предела можно пользоваться таблицами нормального распределения для оценки значимости среднего из серии экспериментов, и в представлении иных таблиц для случая слишком незначительного числа экспериментов.

Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значения  $n$  [элементов] случайной выборки объёма  $n$ , из нормального распределения с нулевым средним и стандартным отклонением  $\sigma$  и через  $\bar{x}$  – выборочное среднее. В соответствии с обычаем биометрической школы Госсет определил выборочное стандартное отклонение равным [см. ниже]

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Он вычислил первые четыре момента  $s^2$ , показал, что они соответствуют кривой Пирсона типа III, и, предположив, что эта кривая действительно представляет наблюдения, вывел распределение  $s$ . Замечая, что симметрия распределения  $x$  приводит к нулевой корреляции этого среднего и  $s$ , он показал, что корреляция  $x^2$  и  $s^2$  также нулевая, так что  $x$  и  $s$  статистически независимы.

Далее, он определил распределение величины  $z = x/s$ , исследовал свойства распределений  $s$  и  $z$ , подтвердил теоретические результаты для  $n = 4$  выборочным экспериментом и показал, что при возрастании  $n$  распределение  $z$  стремится к нормальному с дисперсией  $1/(n - 3)$ .

Всё это завершилось построением таблицы вероятности  $z$  для  $n = 4, 5, \dots, 9, 10$ , т. е. дополнением стандартной таблицы нормального распределения, о которой Госсет упомянул в начале статьи.

*Мы теперь видим, что если распределение примерно нормально, в обоих проверенных нами случаях наша теория предоставила удовлетворительную меру уверенности, выведенную из малой выборки. Но существует указание на то, что полезна хорошая группировка [результатов].*

*Если распределение не нормально, среднее и стандартное отклонение выборки окажутся положительно коррелированными, так что, хотя изменчивость обеих этих величин возрастёт, они будут иметь тенденцию противодействовать друг другу, а именно среднее, намного уклоняющееся от генерального среднего, в общем будет делиться на большее стандартное отклонение. Поэтому я полагаю, что таблицу, приведенную ниже, в § 7, можно применять для оценки уверенности в среднем из нескольких экспериментов в большинстве случаев лабораторных и биологических исследований, в которых распределения относятся к типу улучшенной шляпы и потому достаточно близки к нормальному.*

Госсет привёл четыре примера, один из которых относился к различным снотворным воздействиям оптических изомеров, остальные – к экспериментам, опубликованным в *J. of the Agricultural Soc. [Science]*. Исходные данные в первом примере указывали дополнительные часы сна, достигнутые в одном из применённых методов воздействия по сравнению с другим методом. Средняя разность из 10 наблюдений была равна  $+0,75$  со стандартным отклонением  $1,70$ , что привело к  $z = 0,44$ . По своей таблице он определил  $p = 0,877$  для вероятности  $z$  быть меньше указанного значения и заключил, что

*отношение шансов равно  $0,877:0,113$ , т. е. примерно  $8:1$ , в пользу того, что среднее положительно. Для нормального распределения это соответствовало бы  $1,8$  вероятной ошибки. Поэтому весьма вероятно, что первый метод приводит к большей продолжительности сна, но не будет удивительно, если последующие эксперименты укажут на противный результат.*

Выражая свои мысли в рамках обращённой вероятности и переводя вероятность в обычные для того времени вероятные ошибки, Госсет следовал стандартной практике. Но в отличие от биометрической школы он применял различные символы для параметров совокупности и выборочных оценок. По обычаю той школы указанные символы не отличались друг от друга, что приводило к изрядной путанице. Статья Госсета примечательна ещё и видимо первым применением эмпирических выборок<sup>1</sup>.

Друг Госсета, Бивен, был осведомлён о сельскохозяйственных исследованиях в Кембридже, и его сообщение о сильном интересе

Госсета [к ним] объясняет, почему тот обратился к астроному Страттону, который читал лекции по сочетанию наблюдений. Статья Wood & Stratton (1910) была опубликована при обстоятельствах, которые Госсет описал К. Пирсону 18 сентября 1912 г.:

*Если Вы встретили только одного человека, меня, который работает с малыми выборками, то Вы очень одиноки. Именно на эту тему мне пришлось говорить со Страттоном, потому что в статье, предназначенной для показа специалистам по сельскому хозяйству как следует экспериментировать, он для примера рассмотрел выборку объёмом четыре!*

*Я прослышал про это, написал тому, который, мне казалось, составляет эту статью вместе с ним, он же переправил моё письмо виновной паре. Они прислали мне для проверки свои рукописи до того, как вернули корректуры, и я смягчил кое-что! Не очень разумно, но полностью на пользу делу.*

Страттону было очень приятно ободрять более молодых людей, и поэтому Фишеру повезло, что тот был его наставником в кембриджском колледже Gonville & Caius. Будучи всё ещё студентом последнего курса, он (1912) написал статью, в которой применил то, что позднее назвал наибольшим правдоподобием, для оценки среднего и дисперсии нормальной совокупности. Страттон посоветовал ему послать оттиск Госсету, который выразил сомнение в выражении Фишера для оценки стандартного отклонения

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - m)^2}{n}},$$

поскольку в теории ошибок издавна была установлена формула со знаменателем  $(n - 1)$ . Фишер ответил на двух страницах большого формата, покрытых глубокой до отвращения математикой, доказав с применением  $n$ -мерности, что в конце концов следует [действительно] принимать в знаменателе  $(n - 1)$ . Это Госсет и сообщил К. Пирсону 12 сентября 1912 г., переслав ему последующее письмо Фишера.

*Я прикладываю письмо Фишера, в котором доказаны мои формулы частоты распределения  $z (= x/s)$ . Здесь  $x$  – расстояние центра  $n$  наблюдений от генерального среднего и  $s$  – стандартное отклонение этих наблюдений. Не сможете ли Вы просмотреть их для меня? При числе измерений более трёх я чувствую себя не в своей тарелке даже если могу понять написанное в других случаях.*

*[...] Мне казалось, что, может быть, Вы захотите кратко пересказать доказательство. Оно так изящно и математично, что может понравиться некоторым. Во всяком случае, был бы рад узнать Ваше мнение.*

Пирсон ответил через пять дней, пояснив с некоторыми повторениями, что доказательство Фишера озадачило его.

*Я не понимаю доказательства Фишера, притом оно не такого вида, который мне нравится. Он прислал мне свою рукопись A new criterion ... [видимо Fisher (1912) с несколько иным названи-*

ем] и попросил меня о чём-то [?] для публикации в *Биометрике*. Я в то время не думал, что она сколько-нибудь важна и обменялся с ним письмами по этому поводу. В своё время я часто встречался с его наставником, Страттоном. Если не ошибаюсь, он был поставлен в тупик, потому что при независимых  $x$  и  $y$  и  $z = x - y$  будет  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ , так что конечно  $x = y + z$  и  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 + \sigma_z^2$ , а не  $\sigma_z^2 - \sigma_y^2$ . Я не понимаю доказательства Фишера, потому что в нём нигде не упоминается предположенное в начале статьи распределение Гаусса.

Я не подумал бы, что какое-либо соотношение вида  $(\bar{x} - t)^2 / \mu^2 = 1 / (n - 3)$  справедливо в общем случае, и не понимаю, что вообще делает автор. Очень возможно, что моя неудача лишь свидетельствует о моей тупости. Что такое  $\mu$  в его геометрии, радиус его сферы или что-то ещё? Он ни разу не нисходит до объяснений и не указывает связи между звеньями своего рассуждения. Какова надлежащая формула для стандартного отклонения,  $\sqrt{S(x - t)^2 / n}$  или  $\sqrt{S(x - t)^2 / (n - 1)}$ , мне представляется весьма малозначащим, потому что только у озорных пивоваров и настолько мало, что порядок различия не равен вероятной ошибке суммирования!

Конечно, если Фишер напишет доказательство, в котором каждая строка следует из предыдущей и определит свои термины, я охотно рассмотрю возможность его публикации, но в его нынешнем доказательстве я не нашёл никакого смысла.

Ничего больше о распределении частоты  $z$  не было опубликовано до статьи Фишера (1915), который подтвердил, что формула Госсета была верной. К тому времени в биометрической школе установился интерес к малым выборкам. А. W. Young (1916) составил таблицу распределения стандартного отклонения в нормальных выборках. Он комментировал случающиеся иногда выборки из двух и трёх элементов, и это убедило Госсета расширить свою первоначальную таблицу вероятности  $z$ . Эта расширенная таблица для выборок от 2 до 30 была опубликована (1917), после чего  $z$  снова исчезло на несколько лет.

3 апреля 1922 г. Госсет запросил Фишера о распределении коэффициента регрессии.

Но, серьёзно, я хотел бы знать распределение частоты  $r\sigma_x/\sigma_y$  для малых выборок. Мне это нужно для своей работы больше, чем ныне удачно найденное распределение  $r$ . Если Вас интересует, я мог бы исследовать свои прежние выборки объёмом 4 на логарифмической линейке, чтобы иллюстрировать Ваше решение.

Лишь чуть больше недели позднее он спросил про вероятные ошибки частной корреляции и частных коэффициентов регрессии для малых выборок и сообщил о расхождении мнений ведущих авторитетов того времени.

Я знаю, что Юл доказал, что при больших числах они совпадают с обычными сводными коэффициентами, но в разговоре со мной проф. Эджуорт как-то сказал, что, хоть и понимает, что коэффициенты корреляции полезны таким, как мы, но сомнева-



*ется, что частная корреляция очень уж полезна. Он затем выразил ощущение, которое и я чувствую в глубине души, что вероятная ошибка частной корреляции, выведенная по малым числам, имеет почти более высокий порядок, чем соответствующая сводная.*

Ответы Фишера утеряны, но в них должны были быть критерии значимости для расхождения средних и для регрессии, частной регрессии и коэффициентов частной корреляции, притом все выраженные в терминах  $z$ . Действительно, 5 мая 1922 г. Госсет написал:

*Как бы то ни было, по поводу фактора регрессии окончательный результат, видимо, состоит в том, что если согласиться с общепринятой формулой для стандартного отклонения, это надо делать в точности так же, как при использовании общепринятого стандартного отклонения среднего, а при малых числах применять таблицы Стьюдента, что, конечно, весьма приятно Стьюденту!*

*Обычная формула должна была быть выведена в предположении, что требовалось стандартное отклонение для заданных значений  $x$ . Это становится ясно, когда указывается. Я не додумался проверить значимость [расхождений?] двух средних из выборки различных объёмов своей кривой типа VII, да и времени не было (как и желания), чтобы попытаться выяснить это после получения Вашего письма, но вероятно удастся достаточно просто составить таблицу Вашего интеграла, хоть не знаю, позволят ли тому, кому я поручу эту работу, опубликовать её.*

*Я удивлён, что вычисление частной корреляции или регрессии приводит лишь к убыванию веса на единицу (by one case), но вижу, что это соответствует другим явлениям подобного рода.*

Упоминание составления таблицы Вашего интеграла наводит на мысль о том, что имелся в виду переход от  $z$  к  $t$ ,  $t = z\sqrt{v}$ . Теперь это является стандартным критерием, применяющим надлежащее число степеней свободы  $v$ .

В сентябре 1922 г. Госсет посетил Ротамстед и впервые встретился с Фишером, а затем выслал ему экземпляр таблиц Стьюдента, *потому что Вы единственный, кто когда-либо вероятно применит их.*

12 октября Госсет посвятил несколько строк кривой типа VII, в основном отвечая на запрос о применении данных [W. R.] Macdonell для отыскания эмпирических выборочных распределений коэффициента корреляции.

*У меня ещё не было времени что-то сделать с типом VII. Дома яблоки, и дела в пивоварне, но надеюсь скоро заняться этим.*

Надежда оправдалась, и 7 ноября он сообщил подробности, а также две колонки вероятностей, вычисленных Госсетом [им самим] с применением своего тригонометрического ряда и формулы разложения Фишера (1925b) соответственно.

*Недавно я немного поработал с типом VII, и пока жена в Англии я положил в рюкзак [и принёс домой арифмометр] Baby Triumphator и понемногу занимаюсь дома, частично в надежде*

понять *Tract II for Computers*. Я таким образом вычислил все значения от  $n = 2$  до 30 при  $t = 1$  с семью цифрами (точные 6). [...] Прошлым вечером я проверил Ваши значения для  $x = 1$  (и обнаружил незначительную ошибку) в Вашей поправочной формуле и вычислил те же значения до семи цифр. Я суммировал не менее четырёх чисел с семью цифрами, и суммы поэтому также ошибочны в седьмой цифре ввиду приближений, но соответствие удивительно хорошее вплоть до примерно  $n = 10$ . После этого Ваши формулы преувеличивают получаемые значения либо потому, что нельзя было пренебрегать не принятыми во внимание дальнейшими членами, либо потому, что четвертая поправка должна была быть меньше, чем Вы считали или иметь противоположный знак, либо ввиду всех этих причин совместно. Я надеюсь немного прояснить это по исследованию чисел.

Всю зиму 1922/1923 г. Госсет усиленно работал над этими таблицами, но затем убавил свои усилия, объяснив это в письме 6 февраля 1923 г.

Теперь по мере возможности я буду работать как следует с остающимися значениями  $C_1$  и  $C_4$ , но народ становится недовольным по поводу арифмометра. Находясь в пивоварне, я никак не могу тратить дневное время на эту работу и боюсь, что до следующей зимы многого не сделаю. Если Вам к спеху, смело попросите кого-либо другого заняться этим.

Летом 1923 г. Фишер начал работать над своей книгой (1925с), что могло послужить причиной, по которой он спрашивал, когда будет готова таблица распределения  $t$  и может ли он сослаться на уже опубликованные таблицы  $z$ . Госсет ответил 12 июля.

Полагаю, что у Вас есть вся завершённая работа над таблицей, но я надеюсь закончить её в течение следующей зимы. Я сказал бы, что она определённо подготавливается. Ссылки на таблицы из *Биометрики* зависят от того, что в точности Вы понимаете под ссылками. Я полагаю, что журнал обладает авторскими правами и будет склонен потребовать их соблюдения любыми лицами. Он уже не оправдывает себя, как это было до войны, и они вынуждены, если только смогут, заставить купить журнал. Будь я редактором, не думаю, что разрешил бы намного больше, чем ссылку!

15 октября, после перерыва в шесть месяцев, Госсет возобновил работу, применяя асимптотические ряды и полагая, что результаты были предназначены для книги Фишера.

Сезон табулирования начался. Я принёс домой арифмометр, и вчера вечером начал работать с ним. Весь вечер я по существу только вспоминал всё и только вычислил 0,1 для всех значений от  $n = 5$  до 21! Я закончу  $C_4$  и составлю ту часть таблицы, которую можно вычислять по Вашим коэффициентам. [...] Я представляю себе, что эта таблица, если закончить её вовремя, будет опубликована в Вашей книге. Не уверен, что смог бы опубликовать её где-то ещё.

Но когда Фишер составлял сводку письма № 34 [статья 1924а], он упомянул, что никогда всерьёз не думал о перепечатке таблицы  $t$  Стьюдента.

И таблицы  $z$ , и все статьи Госсета кроме одной появились в *Биометрике*<sup>2</sup>, и его преданность своему бывшему учителю заметна в письме 2 ноября.

*Я думал о публикации таблицы и пришёл к выводу, что должен предложить её прежде всего К. П. Я изрядно сомневаюсь в том, что он захочет опубликовать третью таблицу на ту же тему, и особенно потому, что Вам придётся составить пояснительные замечания. Не будете ли Вы возражать, если я предложу ему таблицу по Вашему поручению на подобной основе? Если он согласится, будет только хорошо, а если откажет, то большого вреда не последует.*

Вскоре Госсет обсудил этот вопрос при поездке в Лондон, когда беседа с Пирсоном выявила ошибки в таблицах  $z$  и потому посеяла сомнения в согласии на публикацию таблицы  $t$ . 23 ноября он охарактеризовал положение.

*Я не знаю, согласится ли он как-то воспользоваться нашей таблицей. Мне это представляется довольно сомнительным, но чувствую, что вряд ли смогу заговорить с ним об этом, если Вы не согласитесь, либо сами, либо с помощью мисс МакКензи выполнить немалый объём проверок. Хорошо, что Вы не забрали эту таблицу из *Биометрики*!*

Через две недели К. П. заинтересовался этим предложением, но Фишер отказался от проверок, несомненно будучи занят подготовкой своей книги.

*Пирсон снова сообщил, что будет рад рассмотреть нашу таблицу для второго тома *Таблиц для биометристов*<sup>3</sup> и, следовательно, как можно предположить, для *Биометрики*. Можно будет использовать одни и те же печатные формы. После того, что Вы сказали, в известной степени постыдно обременять Вас исправлениями, но думаю, что могу справедливо оставить Ваши собственные таблицы на Вашем попечении.*

Несмотря на решение предложить таблицу *Биометрике*, Фишер по-прежнему сильно желал оставить за собой право её публикации в другом источнике. 20 декабря Госсет согласился разъяснить это Пирсону, но подчеркнул трудности, которые тот испытал в связи с нарушениями авторского права.

*По поводу Вашей приписки о публикации, я вполне согласен послать или отнести её когда всё будет готово, и разъясню, что Вы желаете оставить за собой право её публикации в какой-либо книге, которую Вы быть может напишете. Я, возможно, ошибался, когда, кажется, сообщил Вам, что Вам нельзя будет забрать таблицу без разрешения К. П.*

*Я действительно знаю, что он заставил меня взять разрешение перепечатать таблицу из статьи Бивена не только у Э. Ш. Пирсона, но и от Министерства сельского хозяйства. Сам он очень раздражён американцами, которые самовольно переиздали материал из *Биометрики* и *Таблиц для биометристов*. Ведь фактически эти таблицы публикуются либо себе в убыток, либо с такой небольшой прибылью, что приходится стараться изо всех сил продавать их экземпляры, чтобы свести концы с концами.*

Таблицы были уже давно подготовлены, когда 20 мая 1924 г. Госсет послал их экземпляр Фишеру с просьбой составить их описание. Он сам сообщил о методах, использованных [при их составлении] и добавил приписку:

*Если бы Вы прислали мне их описание в самом начале следующего месяца, я вероятно смог бы взять их с собой в свой следующий приезд к К. П. Мне изготовят машинописную копию, потому что ему всё труднее читать рукописи.*

Фишер до 17 июля не смог закончить составление пояснения таблицы и своей аппроксимативной формулы, так что в июне Госсет смог взять К. П. только саму таблицу, и 31 мая 1925 г. признался, что при посещении Университетского колледжа оставил её в доме своего отца.

*Я, наконец, принёс К. П. таблицу вместе с Вашим пояснительным комментарием. Я совсем не уверен, что он откажется её опубликовать. С другой стороны, я предоставил ему полную возможность так и сделать, и она ещё может вернуться к Вам. Боюсь, что очень медлил. Я привёз её [в Лондон] в прошлом году, но, к сожалению, при посещении лаборатории оставил дома.*

К середине 1924 г. книга Фишера (1925с) была почти готова, а поскольку он отправлялся в Канаду с конца июля до начала сентября, то попросил Госсета просмотреть её корректуру<sup>4</sup>. Письмо Госсета 20 октября сопровождалось длинным списком замечаний и исправлений. Так, он предложил, чтобы таблицы, сложенные в книги, можно было бы раскладывать, и это было осуществлено в более ранних [?] изданиях. Таблица хи-квадрат доставила Фишеру хлопоты, потому что таблицу Элдертона (W. P. Elderton 1902) нельзя было перенести без нарушения авторских прав. Фишер поэтому составил новую таблицу III, *практически оказавшуюся более удобной*. Значения хи-квадрат он указал для выбранных значений вероятности дополненной функции распределения, а не для вероятностей произвольных  $\chi^2$ , и тем самым ввёл понятие о номинальном уровне значимости.

В примечании к этой таблице по предложению Госсета сообщалось, что  $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$  распределено нормально с нулевым средним и единичной дисперсией. Тот же метод представления Фишер использовал для таблицы IV распределения  $t$ :

*Необходимые распределения указал Стьюдент (1908а), и он же позднее составил более полные таблицы. В конце этой главы [...] мы приводим распределения в форме, сходной с использованной в нашей таблице хи-квадрат.*

Большая часть таблицы IV была, видимо, получена обратной интерполяцией, либо заимствована из таблицы в Стьюдент (1917), которая появляется вслед за таблицей IV в замечаниях Госсета к корректуре, либо из таблиц, составленных в мае 1924 г. [Госсет (1925)?] и упомянутой в последующих изданиях книги Фишер (1925с).

Работа с корректурой продолжалась до марта 1915 г., и в то время помощник Госсета, Самерфильд, подготавливал указатель. Проект о функции распределения  $t$  вновь появился в упомянутом

письме Госсета 31 мая, а 12 июня он дал знать, что Пирсону понравилась только одна из двух его рукописей.

*К. П. очень хотел бы опубликовать Вашу заметку о применении таблицы, но ему не нравится биномиальная аппроксимация. Он считает, что необходимо доказательство сходимости. Я тщетно указывал ему, что сходимость или расходимость проверяется на практике (для меня, но несомненно не для Вас) тем, что те же самые примерно семь значащих цифр можно получить и для  $n = 21$ , и вплоть до  $n = 6$ .*

*Как бы то ни было, он возвращает обе заметки, и я их сейчас пересылаю Вам. Думаю, что если Вы сможете доказать сходимость, он захотел бы опубликовать обе. В противном случае Вы можете не давать ему и другую, хотя, как я сказал, он хотел бы опубликовать её. Надеюсь, однако, что Вы пришлёте её мне обратно, потому что, как бы ни обернулось дело со спорной рукописью, я уверен, что К. П. хотел бы быть миролюбивым, и эта заметка должна появиться в Биометрике.*

Хоть Пирсон всё ещё ожидал пояснительного комментария, в начале октября Госсет и Фишер договорились, как представить свою работу, и было решено послать таблицы, пояснения и формулы в *Metron*. Госсет просмотрел корректуры в январе 1926 г., вернул их Фишеру в начале февраля и получил оттиски в июне.

5 июля 1927 г. Jack W. Dunlop из Станфордского университета сообщил Фишеру [необходимые] исправления, которые, видимо, были опечатками, потому что Госсет *был достаточно убеждён, что проверил корректуру*.

**5.3. Статистические методы для исследователей.** Госсет получил свой экземпляр первого издания июня 1925 г., а через год сообщил об искусстве реферирования:

*Попытку рецензии на Статистические методы я послал секретарю Евгенического общества. Ответа не получил, но полагаю, что она дошла благополучно. Мне было очень трудно писать; не будь поездки на поезде, которая как-то помогает составлению, я бы ещё не закончил её.*

22 октября 1927 г., со своим обычным пренебрежением именами, он заметил, что очень хорошая рецензия появилась в *J. Amer. Stat. Soc. [Assoc.]*<sup>5</sup> В октябре 1924 г. комментарии Госсета и Самерфильда в корректуре первого издания включали следующие строки.

*Начинать с такого технического примера как Пример 1 несколько обременительно. Тот, кто не биолог, в самом первом примере сталкивается со следующими необъяснёнными терминами [приведены восемь терминов, в том числе, однако, гены], да и некоторые математические рассуждения приходится принимать на веру. [...] Во всяком случае, я [!] бы свёл вопрос только к растениям, потому что на самом деле Вы только их и рассматриваете. Но разве нет более общих проблем?*

Во втором издании 1928 г. вместо раздела [параграфа ?] 6 и Примера 1 первого издания появилась новая глава 9. 1 апреля Госсет поблагодарил за то, что он дал нам возможность увидеть дополнения, и 4 апреля Фишер ответил:

*Я несколько надеялся, что Вам понравится глава 9. Частично это было Ваше предложение, и думается, что я принял его во внимание в большей степени, чем Вы ожидали бы. Полагаю, что первое предложение [в ней] – это мой лучший ответ на вопрос о том, что хотел бы видеть там исследователь-прикладник. Разве Вам не нравится поведение хи-квадрата? Я был восхищён этим, и мне представлялось, что различные формулы даже Вам сэкономят некоторое время.*

8 июня 1929 г. Эгон Пирсон опубликовал в *Nature* рецензию на второе издание книги, и его замечания привели к переписке (§6.5). 31 декабря 1934 г. Фишер получил письмо от Isidor Greenwald из [...]:

*На с. 112 – 114 четвёртого издания [...] я нашёл обсуждение результатов некоторых экспериментов Cushman и Peebles. Мне захотелось выяснить, какие же выводы они сделали, и я просмотрел их статью (*J. of Physiology*, 32, с. 501). Я обнаружил, что они утверждают, что [...] (а не [...]) обладают примерно тем же самым снотворным влиянием. Числа в их таблице подтверждают это заключение. [...] Вы и Стьюдент видимо неверно поняли их колонку [...] и колонку [...]. Я очень удивлён, что эта ошибка не была исправлена уже давно.*

Самерфильд обнаружил, что эти утверждения были справедливы, и Госсет подтвердил ошибки 7 января 1935 г.

*Этот пакостник, конечно же, совершенно прав, хотя всё это безусловно не стоит выеденного яйца. Странно, что я совсем не помню, что отобрал две колонки из четырёх в их таблице. Не промахивайся я столь талантливо, подумал бы, что нашёл числа в сообщении об их статье. Боюсь, что Вам придётся изменить [некоторые] заглавия в последующих изданиях, и разрешаю Вам как угодно выругать меня в подстрочном примечании.*

*P. S. Помню, что мне было очень трудно добыть какие-нибудь числа для иллюстрации, но никак не могу сказать, как мне удалось отыскать статью этих авторов. Неудивительно, конечно, что никто не обнаружил ошибки, потому что в до-фишеровское время никто не обращал внимания на их статью.*

Фишер решил, что в последующих изданиях эти лекарственные средства не будут никак названы, хоть об этом и приходится несколько сожалеть. Он объяснил это Гринвальду в письме 10 января.

*Я несколько расстроен [этим], поскольку физиологические различия оптических изомеров интересны само по себе, и вот сейчас я испытываю некоторые различия в их вкусе.*

#### **5.4. Планирование эксперимента**

**5.4.1. Введение.** Научная революция XVII в. была основана на запланированных экспериментах, повторных измерениях и исследовании данных при помощи математических моделей<sup>6</sup>. В XVIII в. последовала сельскохозяйственная революция, и здесь мы обсуждаем только планирование и анализ полевых сельскохозяйственных экспериментов.

В своём четырёхтомнике А. Young (1771) подчеркнул необходимость сравнительных экспериментов для учёта различий

климата и плодородия почвы и ввёл повторные опыты для сведения к минимуму влияний изменчивости окружающей среды. Johnston (1849) рекомендовал как можно дальше отделять повторные опыты друг от друга, причём расположение опытов определять одно за другим ходами коня по шахматной доске. Он также предложил неизменно исследовать два удобрения, и не только самих по себе, а в сочетаниях. В 1890-е годы Бивен начал эксперименты с ячменем в Варминстере и разработал два других систематизированных плана. Одним из них был шахматный план, обобщение ходов коня (Egon Pearson 1939), о другом см. ниже.

Статистические методы были впервые применены в сельскохозяйственных полевых опытах в двух статьях, опубликованных в начале нынешнего [XX] века. В обеих широко применялись данные по равномерным экспериментам, в которых все участки обрабатывались сходным образом. Wood & Stratton (1910) привели распределения частот, вычислили вероятные ошибки, применили критерии значимости и оценили число повторений определённой обработки, необходимое для получения значимых результатов.

Mercer & Hall (1911) рекомендовали размеры участков и количество повторения опытов. В приложении ко второй статье Стьюдент (1911) предложил систематический план для сравнения [урожаев] двух разновидностей [изучаемой культуры], при котором стандартная ошибка [= стандартное отклонение] оцениваемой разности между ними уменьшалась корреляцией между половинами участков. Перед публикацией обе статьи прошли через руки Госсета, а контакт между ним и Фишером установил Страттон в качестве наставника Фишера.

**5.4.2. Шахматные планы.** В 1923 г. Госсет с одной стороны и Бивен, Фишер и Юл с другой обменялись письмами. Они обсуждали стандартную ошибку оцениваемой разности [урожаев] между разновидностями при применении шахматных планов. Переписку Госсета и Бивена описал Э. Пирсон (1939). Ныне в неё вставлена переписка Госсета с Фишером<sup>7</sup>.

29 марта Госсет написал Бивену об этой ошибке и в тот же день Фишеру, притом приложил памятную записку, которую воспроизвёл Э. Пирсон. Бивен сообщил Госсету, что полагал, что Юл занимался методом шахматных планов, и Госсет представил себе, что вероятно делает Юл и послал ему вторую записку об этой ошибке.

Всё это Госсет сообщил Бивену 9 апреля и Фишеру 16 апреля. В своём письме Бивену 20 апреля Госсет привёл сводку ответов Фишера и Юла, а в письме Фишеру 27 апреля сообщил, что выявил ошибку в своей памятной записке, возникшую от пропуска  $-\sigma_e^2/np$ . Фишер ответил 2 мая:

*Я рад, что теперь оценка ошибки верна. Прелесть расщепления суммы квадратов на отдельные части состоит в том, что у каждой части независимые погрешности выборочного обследования соответствуют числу степеней свободы. Это в громадной степени облегчает исследование значимости. Вместо вычисления, скажем, корреляции внутри классов при некотором беспо-*

койстве о перекрестных соотношениях и вычисления моих преобразований и поправок, присущих подобным корреляциям, можно выполнять непосредственное сравнение.

Остаток письма предвещал распределение  $F$  и его связи с нормальным распределением и распределениями  $t$  и хи-квадрат. Письма от Госсета 21 и 27 июня завершили переписку о формуле ошибки в шахматном методе. В своей статье (1923) он признал помощь Фишера в длинном подстрочном примечании с двумя выводами остаточной суммы квадратов.

**5.4.3. Метод Half-Drill Strip (HDS)<sup>8</sup>.** Составляя указанную статью, Госсет заметил ошибку в работе об этом методе, которую он разрешил Бивену опубликовать (?). Сравнивались две разновидности, назовём их А и С, повторением схемы АССА, так что местные линейные тренды в плодородии исключались. При делении полосок на блоки план эксперимента выглядел так:

AAA ... A; CCC ... C; CCC ... C; AAA ... A; CCC ... C; AAA ... A; ...

Полоски здесь соответствовали этим группам, а пары полосок высевались совместно как АС или СА в единой борозде (in a single drill). 21 июня Госсет сформулировал проблему:

*На самом деле блоки, образующие некоторую HDS, коррелированы и потому не могут послужить для оценки вероятной ошибки, присущей некоторому числу HDS. Но я полагаю, что таким путём можно вывести минимальную ошибку. Если случайно (по необходимости очень немногие) HDS обеспечат ошибку ниже той, которая будет определена на основе случайности по блокам, то эту последнюю и следует принимать.*

Эту тему он подробно обсудил в четырёх письмах, содержание которых тесно примыкает ко второй части его статьи (1923). Госсет понимал, что урожаи от блоков некоторой полоски положительно коррелированы, частично ввиду неверного метода (technique), но также и по причине неравномерной скорости изменения плодородия. В результате стандартная ошибка разности А – С, вычисленная по паре полосок, оказывалась значительно больше той же величины, оцененной по разностям блоков.

*Кстати, можете ли Вы себе представить случай, при котором вы действительно в состоянии достичь лучшего понимания подразделения единиц на части? Мой пример, который я сообщил Бивену, притом не очень подходящий, был таков: у вас есть и жёлтый, и зелёный банан, и Вы хотите узнать, который из них слаще (и у Вас хороший вкус!). Вы немножко добьётесь, если разрежете каждый банан на шесть частей и будете пробовать шесть пар вместо того, чтобы съесть бананы целиком!*

Он предложил преодолеть эту трудность, принимая за единицу группу АССА, оценивая коэффициент корреляции  $r_{12}$  между смежными парами групп, расположенными вдоль рядов, и предполагая, что корреляция убывает в соответствии с равенством  $r_{pq} = r_{12}^{p-q}$ . Но затем возникли новые трудности.

*И всё же я, кажется, немножко добился в своих попытках определить корреляцию по изучению смежных подгрупп и*



принимая априорную теорию убывания корреляции. Ведь на самом деле вероятно, что в связи с техническими трудностями, подобными тем, которые Вы указали, смежные подгруппы едва коррелированы, тогда как корреляция между подгруппами, расположенными через одну, вполне приличная, а именно, в среднем, соответственно, + 0,06 и + 0, 27.

В ответном комментарии Фишер, видно, указывал на существование корреляции во всех направлениях, на недооценку и переоценку ошибок, и на возможность волн плодородия. Госсет, однако, закончил своё описание проблемы вопросом о том, не является ли корреляция вдоль полосок взаимно компенсирующей.

Конечно, теоретически существует отрезок блока сравнимый (compared) с длиной drill, на котором положительная и отрицательная корреляции взаимно уничтожатся и дадут значения стандартных отклонений блоков и групп с теми же вероятными ошибками, но вообще я чувствую, что так может происходить только по странному течению обстоятельств. Вероятная ошибка будет очевидно изменяться не только от поля к полю, но и с направлением борозды (drill) в поле, и я готов держать пари при неблагоприятных шансах на выигрыш, что даже при постоянной корреляции она будет изменяться от года к году.

**5.4.4. Общепринятые правила экспериментирования.** Пока Госсет исследовал формулу погрешности шахматного плана экспериментирования, Фишер и Маккензи написали свою статью (1923)<sup>9</sup>. Они изучали результаты факторного эксперимента на картофеле. 12 его разновидностей было трижды высажено по шахматной схеме и удобрены сочетанием навоза и поташа. Их эксперимент иногда называют первым, в котором применялся дисперсионный анализ<sup>10</sup>, но это утверждение оспаривалось.

25 июля, вскоре после публикации этой статьи, Госсет написал: Я наткнулся [...] на Вашу статью. Боюсь, что некоторые ошибочно подумают, что, поскольку Вы не обнаружили значимого отличия в реакции различных разновидностей на удобрения, то его и нет. Мне представляется, что эксперимент был очень плохо запланирован, и Вам следует помочь им [разобраться]. И вероятно Вы сейчас так и делаете.

Госсет сообщает своё мнение о том, что может выявить эксперимент и 30 июля подробно ответил на запрос Фишера.

(3) Как бы я запланировал эксперимент? Ну, рискуя сообщить Вам слишком много известного, я подробно изложу эту тему. Вы сами вызвали огонь на себя! Существуют четыре принципа эксперимента в большом масштабе.

а) Должна сохраняться существенная близость к обычной практике; любое отклонение от практики является существенным, если не доказано противное.

б) Опыты должны быть поставлены так, чтобы добиться наибольшей возможной корреляции между сравниваемыми числами.

в) Повторения должны быть запланированы так, чтобы между ними была наименьшая возможная корреляция (или наивысшая возможная отрицательная корреляция).

*г) Должна быть достигнута экономия усилий. Весь экспериментальный материал должен быть сосредоточен на принятии решений. Никаких экспериментов не следует производить после того, как становится ясно, что их достаточно для принятия решений.*

Затем Госсет проверяет, соблюдались ли эти правила или нарушались и обнаружил, что а) нарушалось, б) соблюдалось, в) соблюдалось не полностью, а г) зависело от цели эксперимента. Он закончил общим советом, основанным на опыте.

*Вы, вероятно, подумаете, что многие мои возражения элементарны и что запланированные мной эксперименты должны были быть крайне громоздкими. Да, но, тем не менее, по моему опыту очень часто самые неразумные возражения оказываются достаточными, чтобы испортить эксперимент. Если я сейчас планирую эксперимент, то стараюсь наметить его симметрично по дням недели и часам дня и вообще относительно всего, что только можно представить себе. Я слишком часто терпел неудачу от элементарного.*

*Наконец, закончив планирование, покажите свой план кому-нибудь, кто ничего о нём не знает, и пусть он безжалостно раскритикует Вас. То, что казалось Вам вполне достоверным и явным, может показаться ему иным, и это, возможно, насторожит Вас. Не обязательно соглашаться с ним, но перед тем, как отвергнуть его совет, проверьте, действительно ли Ваши доводы сильнее его возражений. А если он не понимает сути того, о чём говорит, то это иногда на пользу делу: он находится в лучшем положении для того, чтобы ссылаться на общие принципы, Вы же бессознательно предубеждены возможностями, опытом и даже удобным случаем.*

На протяжении следующего года Фишер начал разрабатывать свои собственные правила экспериментирования, и первые результаты его раздумий появились в конце его книги (1925с). В § 48 он отверг систематические расположения, указал принцип случайного назначения обработок участков и показал, что точность результатов можно повысить обработкой по блокам. В § 49 он ввёл латинские квадраты и привёл искусственный пример, основанный на данных Mercer & Hall (1911) равномерной обработки.

20 октября 1924 г., возвращая корректуру книги, Госсет указал, что по поводу последних страниц книги он предложил меньше замечаний и поправок, чем в предшествовавших страницах, возможно ввиду худшего понимания темы. И всё же он сформулировал твёрдое мнение о латинских квадратах.

*2. Я не надеюсь убедить Вас, но не согласен с Вашей регулируемой случайностью. Вам понадобится обширная психиатрическая больница для операторов, которые даже сейчас склонны совершать достаточное число ошибок.*

*Я совершенно согласен, что эксперимент, подобный ирландским участкам б на б, совсем не годится, если он расположен систематически, но если Вы повторяете эти шестёрки достаточно часто, то всё вновь становится случайным. А если*

*Вы что-то говорите о Стьюденте в своём предисловии, Вам следует, как я полагаю, упомянуть, что он не согласен с практической частью, но, конечно, принимает теорию.*

Он повторил свой довод 30 ноября 1927 г., сообщив, что воспользовался некоторыми классическими данными об урожаях Mercer & Hall и других авторов и расположил их в правильные пятиугольники (five-sided squares), подразделённые на разновидности а) регулируемой случайностью по Фишеру и б) диагональной системой, сходной с участками Ballinacutta [деревня Баллина-Корра в Ирландии].

*И я обнаружил, что дисперсия средних этих разновидностей почти та же в обеих системах. Сейчас я полагаю, что во втором случае она чуть меньше, но не думаю, что различие окажется сколь-нибудь существенным. Я думаю заключить, что латинские квадраты обладают очевидным теоретическим преимуществом, но для тех, кто в своей практической работе склонен ошибаться, вторая система на самом деле предпочтительнее, притом не представляя никакой серьёзной угрозы действительным отличиям от практической случайности.*

Фишер (1926) описал свои основные идеи и пояснил свои правила экспериментирования, однако Госсет продолжал считать новые планы обобщением систематических расположений, а потому предпочитал латинские квадраты рандомизированным блокам. Статья Eden & Fisher (1927) об озимом овсе предоставила ему возможность проверить свои убеждения ссылкой на их эксперимент, о чём он сообщил в двух письмах в апреле 1928 г.

13 апреля. *Я просмотрел статью об озимом овсе, и мне представляется, что происходит такое явное убывание плодородия слева направо на Вашей диаграмме, что Ваша погрешность заметно крупнее, чем была бы при упорядочении распределения. Этого можно было бы добиться без потери случайности если не при помощи латинских квадратов, то по крайней мере включая один из каждого метода обработки в каждую полосу. Помимо меньшей ошибки Вы, видимо, получили бы более согласованное множество результатов, хотя других существенных отличий было бы немного. По вопросу упорядочения наши точки зрения не полностью совпадают, и поэтому я хотел бы, если Вы не возражаете, защитить латинские квадраты от рандомизированных блоков, притом Ваш эксперимент послужил бы критерием либо для заметки в J. of Agricultural Science, либо для части предполагаемой статьи об отсутствии случайности в вещах вообще.*

18 апреля. *На самом деле с латинскими квадратами связано два принципа. Большее значение из них я придаю выравниванию ошибки, а Вы – рандомизации. По моему мнению, в громадном большинстве случаев рандомизация вводится в любой надлежаще выровненный эксперимент самой почвой, хотя, конечно, там, где в последние годы почва ранее применялась для экспериментирования или по любой другой причине имела место линейная неравномерность, лучше привести её искусственно. (Расположение в*

ирландском шахматном порядке я не считаю надлежаще сбалансированным экспериментом.)

*Наконец, почему я предполагаю защищать латинские квадраты против рандомизированных блоков? Потому, что не могу припомнить, чтобы Вы опубликовали какие-либо результаты в соответствии со схемой этих квадратов и полагаю, что это обстоятельство намного вреднее отразилось на них, чем действие любых иных атак.*

Через восемь лет расхождение их частных мнений об относительных достоинствах экспериментальных планов перешло в общественное противостояние<sup>1</sup> рандомизированных и систематизированных планов, см. § 6.7.

**5.4.5. Ланаркширский эксперимент.** Gerald Leighton & Peter L. McKinlay (1930) опубликовали отчёт о потреблении молока и физическом развитии школьников. Они описывали национальный эксперимент с участием 20 тысяч детей в 67 школах Ланаркшира [Шотландия]. В течение четырёх месяцев 5 тысяч детей получали по 0,45 литра сырого молока, 5 тысяч – столько же пастеризованного молока и 10 тысяч (контрольная группа) не получала ничего. Некоторым школам привозили сырое молоко, другим – пастеризованное, но ни одна школа не получала и то, и другое. Школьников отбирали иногда по жребии, а иногда по алфавиту в следующем порядке.

*В каждой участвовавшей школе с необычно высокой долей упитанных или истощённых детей вместо них в эксперименте участвовали другие дети, чтобы отбор оказался более однородным.*

В начале и конце эксперимента детей взвесили и измерили их рост. Вот окончательный вывод отчёта об эксперименте, по которому произошла дискуссия:

*В условиях проведенного исследования влияние сырого и пастеризованного молока на рост и вес, насколько мы смогли судить, одинаково<sup>11</sup>.*

В этом выводе усомнились Stephen Bartlett (1931), а затем Fisher & Bartlett (1931), которые утверждали, что пастеризованное молоко менее ценно и для мальчиков, и для девочек, хотя сомнение, вызванное снабжением школ либо тем, либо другим, не могло быть полностью исключено.

14 июля 1931 г. Госсет сообщил Пирсону, что собирается критиковать эксперимент и заметку Фишера и жителя города Рединг [Бартлетта] в журнале *Nature*. Через девять дней он послал К. П. черновой вариант своей рукописи.

*Надеюсь, что Вы заинтересуетесь, хотя для таких, как я, основное достоинство моей заметки (в ней нет никакой чёртовой математики) вряд ли понравится Вам.*

Ответ Пирсона 26 июля мы воспроизводим полностью, чтобы передать его подробные замечания о критике и предложениях Госсета.

*Вы, видимо, доказываете, что из весьма тщательно продуманного и дорогостоящего эксперимента мало что можно вывести. Сказано неплохо, или, скорее, скверно. Я не знаю, предшествовали*

ли эксперименту какие-либо статистические советы, но по меньшей мере один из факторов развития видимо упустили все. А именно, если в силу обстоятельств рождения или ранней окружающей обстановки ребёнок отстаёт в развитии, то в дальнейшем он склонен наверстать упущенное.

Если контроли состояли из детей с более значительным весом и более крепким телосложением, чем молочники, я бы ожидал, что, не будь никакого отличия в их питании, в обеих группах более старшие дети оказались бы ближе друг к другу. Имеет ли это отношение к результатам эксперимента?

Ваши практические предложения таковы. 1) Либо повторить эксперимент в том же масштабе, но при лучших мерах предосторожности и большем числе наблюдений питания (nutritional observations) либо 2) экспериментировать с однойичевыми близнецами. По поводу 1). Я не вижу необходимости во втором эксперименте. Первоначальные планы должны быть всё ещё доступны, как и карточки школьных медицинских работников с данными о питании, зубах и пр. обо всех, или по меньшей мере о большинстве детей. Никто никому не мешает ознакомиться с этими сведениями, отбирать пары одного и того же возраста и очень близких по весу и росту.

Конечно, при этом отпадёт определённое число школьников каждого возраста, и контролей и молочников, но для выводов разумных результатов в возрастах 6 – 11 лет останется достаточно. Если карточки школьных медицинских работников с данными о питании доступны, а вероятно так оно и есть, по крайней мере для поступающих в школу и закончивших обучение, то можно будет составить какое-то впечатление о состоянии каждой из трёх групп. Поэтому я полагаю, что было бы неплохо указать что-либо подобное, но не предлагать повторения эксперимента. Если отбор был действительно случайным, тогда вероятно во всех группах некоторые дети получали достаточно молока у себя дома, а при добавлении молока, или даже без этого, в группе молочников вес может возрастать, притом бесполезно для ребёнка. Прибавка веса, не соразмерная размеру тела, не обязательно улучшает состояние здоровья. Простая проверка мускулатуры у контролей и молочников может оказаться полезнее, чем проверка веса.

Теперь о Вашем предложении 2). Как определить, что близнецы действительно однойичевые? Для этого были предложены разнообразные методы, но ни один из них мне не представляется очень уж убедительным, или, если на то пошло, удовлетворительным. Кроме того, а) как рассуждать при переходе от близнецов к остальным детям? Средний вес близнецов при рождении очень намного меньше, чем у остальных младенцев, и это различие может сохраняться долгое время и в школьном возрасте. Но начинает действовать принцип убыстренного роста, который я упоминал, и близнецы могут в основном приближаться [по весу] к остальным детям.\*

Только лица, достаточно осведомлённые и присутствовавшие при рождении близнецов, могут быть уверенными в их однойиче-

вости. Определить это по видимой схожести и доказывать, что они более коррелированы, чем несхожие близнецы, а потому являются однойцевыми, в известной степени означает опору на порочный круг.

б) Но допустим, что Вы отобрали нужных Вам 50, будете ли Вы распределять их в группы по полу и возрасту? И какими окажутся вероятные ошибки при такой группировке или без неё? Если Вы не будете группировать их, то по каким данным Вы вычислите эти вероятные ошибки? По другим наблюдениям, которые позволяют определить стандартные отклонения у других детей того же возраста, хоть близнецы вероятно не растут так же, как другие дети? И при этом как Вы установите объединение вероятных ошибок для всех близнецов, чтобы определить, значимы ли различия в Ваших группах?

Или Вы хотите предположить, что схожие близнецы не будут отличаться в своём физическом развитии кроме как ввиду молока? Я думаю, что это предположение следует доказать и полагаю, что это окажется нелёгким. Пусть веса однойцевых близнецов были вначале несколько различными. Это могло произойти ввиду различных скоростей развития, а если молоко подведёт А к В, припишете ли Вы это неравной скорости развития или молоку? В больших числах индивиды А и В будут возможно равно распределены между контролями и молочниками, но я не могу представить, что так обязательно случится при любом числе обнаруженных Вами однойцевых близнецов. Я только формулирую советы, но Ваши конструктивные предложения кажутся мне спорными.

\*Когда [белых] мышей убивают в одном и том же возрасте, и считают их взрослыми, всё же оказывается, что размеры их костей коррелированы с размером помёта, в котором они родились.

И в следующем письме 30 июля ответ Госсета был также осмотрительным и подробным, а его заключительные предложения вскоре оказались плодотворными, хоть возможно и не в предположенном им смысле.

(1) Как Вы говорите, ни авторы отчёта, ни я не упомянули того, что дети, отстающие в развитии, навёрстывают упущенное, однако, хоть я и не знал этого наверняка, думаю, что мы оба представляли себе эту возможность.

Они [устроители эксперимента] проверили корреляцию веса (и роста) до эксперимента и прироста [того и другого] во всех 42 группах, и обнаружили, что коэффициенты были невелики, хоть некоторые и оказались значимыми. Думаю, что корреляция веса мальчиков и роста девочек была в целом отрицательна, а веса девочек в более старших возрастах положительна.

Я, с другой стороны, считаю, что вначале различие между контролями и молочниками не было вызвано самим отбором по росту и весу, но отбором молочников по бедности, и я определённо считал вероятным, что недостаток роста ввиду бедности может исчезнуть с возможностью большей или

лучшей пищи. Но написанное Вами наверняка подкрепляет мой довод.

(2) Я не сторонник повторения эксперимента в большом объёме. Я полагал, что мои пожелания станут понятными ввиду того, что я назвал его захватывающим. Но я действительно хотел указать, что по моему мнению им [устроителям] следовало бы подбирать детей попарно и назначать одного из них молочником по жребью.

Я не думал, что даже сейчас они могут сделать что-то подобное по существующим записям, за исключением предложенного мной распределения контролей в соответствии с получателями сырого и пастеризованного молока. Но это, конечно, должно быть сделано, и если бы Вы могли указать, как это можно было бы вставить в мою рукопись, то редакторские примечания следовало бы добавить и к (1), и к (2). Вы, очевидно, сможете их убедить просмотреть свои записи, хоть они, вероятно, не станут обращать серьёзное внимание на то, что я мог бы сказать. Но можем ли мы поверить, что они теперь, после эксперимента, должным образом произведут выборки?

(3) Я, пожалуй, должен был несколько подробнее разработать своё предложение о близнецах. Я прежде всего имел в виду отобрать столько однополых близнецов, сколько удастся, и действительно надеюсь, что в Ланаркшире найдется 200 – 300 пар в возрасте 5 – 11 лет. И я бы подразделил их до эксперимента на вероятно однойцевых и других, а школьные медицинские работники несомненно смогли бы сообщить своё мнение на основе внешнего вида.

Первая группа вероятно включала бы 90% однойцевых близнецов, вторая – практически ни одной такой пары. Добавленные по ошибке в первую группу повысят погрешность, но не очень значительно, потому что в любом случае они будут схожими братьями или сёстрами, а влияние однойцевых близнецов на вторую группу будет пренебрегаемым.

а) Я признаю теоретическую невозможность перехода в рассуждениях от близнецов к другим детям, но мне в какой-то степени трудно усмотреть, как в этом конкретном случае проявляется указанное затруднение. Если сырое молоко для близнецов лучше пастеризованного, то почему то же самое не может происходить для остальных детей?

Я, конечно, понимаю, что в некоторых случаях и то, и другое молоко может оказаться бесполезным, но, исходя из того, что какое-то молоко полезно детям, я, пожалуй, заключаю, что существует достаточно свидетельств в пользу этого (независимо от данного эксперимента). Можно очень легко выявить различие между сырым и пастеризованным молоком при опытах на тех, кто вероятно получает наибольшую пользу, а по Вашему мнению близнецы окажутся пригодными для такого эксперимента.

б) Я проверю различия (в весе, росте и любом физическом упражнении, которое Вы могли бы предложить) между двумя близнецами [каждой] отобранной пары. Эти различия укажут и

их собственные вероятные ошибки. Следует, конечно, проверять влияние пола и возраста, и хорошо было бы подразделить близнецов на четыре группы по полу и возрасту. Или же мы можем обнаружить, что никаких значимых расхождений здесь нет. А если не подразделять близнецов на группы, мы в худшем случае увеличим ошибку по сравнению с отдельной обработкой результатов по группам.

Аналогичные соображения будут иметь место при группировке [близнецов] по социальному положению, истоцённой внешности в начале эксперимента или по любому другому относящемуся к делу признаку.

Я, конечно, не имею в виду ничего столь безрассудного, как предположения о том, что все различия обусловлены видом молока, но если назначать сырое и пастеризованное молоко по жребью, всё остальное (кроме, конечно, силы\* влияния вида молока) окажется случайным и поэтому может быть учтено статистически.

С Вашей точки зрения числа невелики, но эти экспериментаторы питания были бы счастливы, если отыщут, скажем, 20 пар близнецов, а я надеялся бы отобрать в указанные две группы в десять раз больше. Если верно, что мне говорят жители Рединга, то на самом деле существует весьма значительное отличие в пользу сырого молока, достаточное, чтобы обнаружить его в подобном эксперименте. Но помимо этой видимой цели эксперимента можно надеяться вывести из него немало очень полезных сведений о проблеме [относительной значимости] природы и питания, если только в то же время будут собраны подробные сведения об окружающей обстановке пар близнецов и их происхождении. И не стоило бы гальтоновской лаборатории позаботиться о подобной схеме и тем самым обеспечить её должное исполнение?

*\*И это тоже, если есть соответствующая информация.*

Исправленная корректура статьи Госсета о ланаркширском эксперименте была послана 18 августа, и статья появилась в 1931 г. (1931а).

Госсет очень осмотрительно формулировал свои выводы из эксперимента, в котором группы детей, получавших сырое и пастеризованное молоко, не были случайными выборками из одной и той же совокупности, а отобраны возможно из различных совокупностей. Он рекомендовал при любом повторном крупном эксперименте разбивать детей попарно с учётом возраста, пола, роста, веса и физического состояния и подразделять пары на *контролей* и *молочников* по жребью. Он также предположил, что 50 пар однойцевых близнецов, разделённых подобным же образом, предоставят более надёжные результаты, притом при намного меньших затратах и беспокойстве. Сегодня каждую схему можно было бы описать как применение рандомизированных блоков для двух методов обработки.

Госсет отверг вывод Фишера и Бартлетта [см. выше], и можно было ожидать, что Фишер как-то ответит, но никакого ответа, видимо, не последовало. Но в движение пришли другие деятели.



Пирсон заинтересовался предложением Госсета об эксперименте с однойцевыми близнецами, а ввиду их отсутствия предложил Этель Элдертон составить пары по исходным карточкам. Она представила рукопись в журнал *Annals of Eugenics*, который вместо Пирсона редактировал уже Фишер, тот же попросил Госсета дать отзыв. Госсет ответил 2 мая 1934 г.

*Вот мой обзор попытки доктора Элдертон совершенствовать ланаркширский молочный эксперимент. Сомневаюсь, что Вы во многом разойдётесь со мной.*

*Было 67 школ. Не знаю, как они были разбиты [на две группы], но если группы выбрали случайно, они предоставят желательное свидетельство. Я, однако, не думаю, что их так и отобрали, потому что мне представляется вероятным, что пастеризованное молоко всего легче было доставлять в пределах города, а сырое – в сельской местности. Существующие сведения (по Элдертон, различие двух контрольных проверок не значимо) согласуются с этой гипотезой, которая притом способствует пониманию того, почему преимущество сырого молока оказалось столь незначительным. На Вашем месте я бы не стал заниматься этим экспериментом, пока не разобрался в географическом распределении школ.*

*Я просмотрел свои диаграммы, и мне представилось, что убывание веса одежды (loss of clothes) объясняет около 2/3 истинного прироста веса, во всяком случае для девочек из контрольной группы.*

Фишер не смог заметить, что рукопись добавила самую малость к разъяснению различия между пастеризованным и сырым молоком, не согласился с замечанием Госсета о городе и сельской местности и, несмотря на сомнения, опубликовал рукопись Элдертон.

**5.5. Совет и довод.** В 1919 г., вскоре после того, как Фишеру поручили изучить отчёты Ротамстедской экспериментальной станции, он обратился к Госсету за советом по поводу арифмометра. 19 сентября Госсет порекомендовал *Триумфатор*, усовершенствованную Брунсвигу, и *Миллионер*, который предпочитает другая фирма. Он продолжил в своём типичном стиле:

*Лично я в основном пользуюсь логарифмической линейкой. Здесь я очень редко набираю достаточно чисел, чтобы имел смысл применить арифмометр, но когда приходится работать с логарифмами, я всегда пользуюсь Брунсвигой.*

Этот практический подход к своим вычислениям был расширен через несколько лет, когда 10 декабря 1924 г. Госсет сообщил Пирсону, что помышляет о конструировании специальной логарифмической линейки для обработки уравнений множественной регрессии и по существу всякого уравнения без членов с произведениями. Через два дня он написал об этом Фишеру и иллюстрировал свои замечания кругом, *нарисованным от руки* со шкалами для зависимой переменной  $y$  и пояснительными переменными  $x$ ,  $z$ ,  $\cos v$  и  $\sin w$ <sup>12</sup>.

При подготовке к лекции о *погрешностях анализа обычного протекания процесса* для Общества биометристов и математических статистиков Госсету пришла в голову другая примечательная идея, по существу о контрольных картах для проверки качества изготовленных изделий, которые начали применяться в 1920-е годы. Некоторые подробности он сообщил Фишеру 6 декабря 1926 г.

*При подготовке я натолкнулся на метод изготовления диаграмм для лекций. Он для меня нов и, кажется, соответствует цели*<sup>13</sup>.

Большое значение придавалось резкому разногласию между Госсетом и Фишером о сбалансированности и рандомизации. О нём стало известно на конференции 1936 г., фактически же в частном порядке различие мнений длилось к тому времени уже 10 лет или больше. Обычно оно имело место в сдержанной форме, но на короткое время могло проявляться очень сильно<sup>14</sup>.

9 марта 1929 г. Фишер опубликовал в журнале *Nature* дружественную рецензию на книгу Kuczynski (1928), но был поражён, отыскав в *Eugenics Review*, что Госсет оценил её намного менее благоприятно, и ему пришлось *выпустить пар*, опубликовав возражение.

Спор, вызванный рецензией Эгона Пирсона на книгу Фишера (1925с), см. § 6.5, только подходил к концу с публикацией письма Госсет в *Nature* 4 июля, когда он же 1 августа последовал примеру Фишера:

*Но Вы не должны предполагать, что я что-то сделал неумышленно. Автор обнаружил интересный новый факт, хоть и не слишком уж значимый. Я хочу этим сказать, что если экономические условия не изменятся, он раньше или позже должен был стать очевидным. Если бы Вы или я заметили его, мы были бы чрезвычайно возбуждены и усиленно исследовали его (мои усилия, видимо, были бы весьма поверхностны, но кое-что я сделал бы) и написали бы короткую статью для какого-нибудь научного журнала.*

*Но его это не устраивает, он, видно, не в силах сдерживаться и должен написать книгу. Но книга такого рода, если она только научная, не будет продаваться, она должна быть сенсационной. Можно опубликовать таблицу необработанной рождаемости, которая покажет, как изнеженные европейцы идут к своей гибели, но таблица необработанных долей смертности (death rates) ослабит это впечатление, так что следует преобразовать её в таблицу смертности. Когда приходится сказать, что в настоящее время рождаемость в Англии не может предотвратить убыль населения, вы тем самым утверждаете, что население Англии должно вымереть и пр.*

Этот взрыв продолжается на протяжении ещё нескольких параграфов, и Госсет закончил утверждением о том, что он *выпустил пар*. *Пишите, что хотите, я сказал всё, что скажу о книге*. Но он вернулся к этой теме в двух последующих письмах. К этому времени Фишер пришёл в себя и закончил своё письмо

13 августа, предварив свои замечания откровенной оценкой точки зрения Госсета:

*Вы самый настойчивый человек из всех живущих и пишете, как будто Ваша первоначальная вспышка была максимально спокойной, продуманной и рациональной, а не столь ревностно возмущенной и предубежденной как у ирландского епископа.*

Последовала переписка, касавшаяся изолиний плодородия в полевых опытах, электрических арифмометров и пр., затем наступил перерыв, вызванный поездкой Фишера в США в 1931 г. В конце того года она возобновилась, а в начале 1932 г. Фишер посетил Госсета в Блэкроке [пригород Дублина], а затем, 26 января, прислал ему письмо с благодарностью вместе со статьей об эволюции доминантности, очевидно (1931). Это наводит на мысль о том, что во время поездки Фишера в Ирландию они перешли к обсуждению эволюционной генетики. Следующее письмо Госсета 16 июля начиналось так:

*Может быть это лишь моё невежество, но из того немногого, что я прочёл про генетику, я вынес идею, что немало её представителей полагают, что каждая из наших разнообразных наследственных неприятностей обусловлена довольно небольшим числом генов. Но тогда имеет смысл обратить внимание на такой случай, при котором трудно было бы отыскать столь простое объяснение. Не смогли бы Вы прояснить это мне?*

Приложение к письму обращало внимание на статью Winter (1929). Его опыты продолжались без перерыва с 1896 по 1924 г. Он проводил селекцию на содержание масла в зерновых из основного семенного материала и вывел две разновидности. В одной из них среднее содержание масла составляло примерно 12 стандартных отклонений первоначальной совокупности над своей средней, в другой оно было около семи раз ниже её. И в то же время дисперсия содержания масла мало изменилась. Госсет заключил:

*Представляется, что подобный устойчивый успех не мог бы произойти, если на содержание масла не влияли сотни генов, и не думается, что и тысячи генов маловероятны. [...] И таким путём мы приходим к понятию вида, терпеливо накапливающего гены, бесполезные при данных условиях и в большинстве случаев нейтрализуемые генами противоположного знака. Но если условия меняются, [...] вид отыскивает в этом запасе гены, порождающие именно те вариации, которые позволяют ему приспособиться к изменениям.*

По совету Фишера Госсет отослал свою рукопись в журнал *American Naturalist*, который, однако, отклонил её подобно тому, как Королевское общество отклонило рукопись Фишера (1918 – 1919). Госсет (1933) опубликовал свою работу в сравнительно малоизвестном журнале *Eugenics Review*.

Позднее Фишер, став редактором журнала *Annals of Eugenics*, предложил Госсету *представить статью*, и математические способности Фишера во многом помогли Госсету подготовить вторую статью (1934) об эксперименте Винтера. Тем временем

Фишер возмел желание обратить больше внимания на статью Госсета письмом в *Nature*, и 16 января 1933 г. Госсет написал ему:

*Убедив Вас подробно написать математическую часть о селекции при помощи несметного числа генов, я был так доволен тем, что всё сделано должным образом, что упустил из вида, что Ваше участие показалось вторжением.*

Госсет предложил вставить несколько предваряющих параграфов, аналогичным тем, которым Фишер начал своё письмо (1933) и продолжал:

*И сейчас мне кажется, что я слышу Ваше бормотание: Да провались он! Почему бы ему не воздержаться от наставлений своей бабушке? Он суетится по поводу своего крохотного успеха как курица вокруг своего единственного цыплёнка. И я отвечаю: Да, сучусь, провалитесь Вы сами! По той достойнейшей причине, что никогда больше не смогу высидеть такое интересующее меня яйцо. Кудах, кудах!*

*Ведь почти до этой минуты я был так охвачен первой частью этого, несметным числом генов, что не заметил, что на самом деле существенным винтиком механизма дарвиновской селекции является вторая часть. По меньшей мере 25 лет подряд я читал, что непрерывное накопление бесконечно малых вариаций бесполезно, но всё время чувствовал в глубине души, что Дарвин был прав. Кудах, кудах!*

*А теперь я удостоен видением и наполнен невыносимым самомнением: будучи одноразовым, я тоже оказался среди пророков. Я только Авгий, но всё же среди пророков<sup>15</sup>. И если кто-то поэтому предложит мне степень доктора богословия, я соглашусь с чувством осознанной гордости, и, вырядившись в пурпурную мантию, без малейшего смущения выставлю себя напоказ улицам Оксфорда.*

*Вытерпи меня, Фишер, посмейся сегодня вместе со мной, ведь завтра, когда я снова окажусь в здравом уме, когда вспомню, что моё крохотное открытие стало известно в 1896 г. и с тех пор часто формулировалось удачнее, чем это удавалось мне, и когда мне укажут, что мой существенный винтик вряд ли подойдёт машине, а если подойдёт, то останется лишь винтиком, – тогда я посмеюсь вместе с Вами, над собой. Кудах, кудах!*

Письмо Фишера, которое обращало внимание на статью Госсета и кроме того ссылалось на Винтера, появилось в *Nature* в выпуске за 18 марта 1933 г. и должно было стать известным биологам по всему миру. Винтик Госсета был действительно существенным, а не безделицей, но признание биологического мира пришло медленно.

В своём Прологе Маур [ & Provine ] (1980), ссылаясь на громадное воздействие книги Dobzhansky (1937), заметили:

*Добржанский посвятил естественному отбору всю главу 6. Его рассуждения чётко отражают, как сильно этому отбору всё ещё приходилось бороться за всеобщее признание. Его изложение было особенно действенно, потому что он представил селекцию не просто как теорию, а как процесс, который можно обосновать эмпирически. [...] Особо впечатляли*

*результаты селекции кукурузы в Иллинойсе на высокое содержание протеина и масла.*

Значимость естественного отбора при эволюции оказалась одним из немногих фактов, по которым Пирсон и Фишер были согласны. В гл. 7 мы отмечаем, что примерно в то время Фишер собирался вместе с Пирсоном предложить Королевскому обществу избрать Госсета своим членом. Можно думать, что, будь он избран, одной из причин успеха был бы его вклад в наше понимание биологической эволюции.



## 6. Эгон С. Пирсон

### 6.1. Историческое введение, написанное им самим

**6.1.1. Вводные замечания.** Наибольшую роль в появлении моего прихода к математической статистике несомненно сыграли четыре человека: К. П. (что было неминуемо), Фишер, Госсет и мой друг и соавтор Нейман. Мои математические способности были лишь средними. В Кембридже моя степень по математике была основана на сдаче первой части математического экзамена в 1915 г., а позднее на опыте воинской службы в Адмиралтействе и Министерстве морского флота и прослушивании избранных лекций [по] второй части [экзамена] для завершения своего обучения и получения степени бакалавра.

Слабость в математике в определённой степени несомненно возмещалась. Она принудила меня обстоятельно и более тщательно рассматривать проблемы и использовать врождённую способность зрительного представления. По обеим этим причинам я оказался быть может лучшим учителем многих студентов, изучавших статистику в Университетском колледже. Впоследствии я смог лучше консультировать [инженеров-технологов] по проверке качества промышленной продукции, а во время второй мировой войны, будучи вместе с тремя своими сотрудниками придан отделу артиллерии Министерства снабжения, смог помогать офицерам технических служб.

После первой мировой войны я впервые начал серьёзно изучать статистическую литературу. В то время в возрасте 24 лет я прочёл мемуары К. П., опубликованные в 1890-х годах в *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Меня особенно пленила его система кривых плотности, которая с тех пор называется его именем. В 1921 г. я окончил свой послевоенный период (1919 – 1921) в Кембридже, в течение которого не только продолжал изучать статистическую литературу, но посещал лекции Сэра Артура Эддингтона и Страттона по теории ошибок и сочетанию наблюдений и прослушал короткий курс лекций Юла по математической статистике. Их я посещал вместе с F. L. Engledow, ставшим впоследствии известным учёным в области сельского хозяйства.

В октябре 1921 г. я вместе с Ирвиным поступил в штат биометрической лаборатории факультета прикладной статистики, который возглавлял К. П. Мы оба стали младшими лекторами с ежегодным окладом в 300 или 350 фунтов. В течение первого года нашего ученичества мы **1)** посещали лекции К. П. по статистике для студентов первого и второго курсов; **2)** помогали его студентам решать численные примеры, иллюстрировавшие лекционную теорию; и **3)** исследовали одну или две проблемы, которые предложил нам К. П.

Я продвигался от ученичества к развитию собственных независимых мыслей совместно с Нейманом на фоне столкновения идей и методов К. П. и Фишера. Происходило это в период, который быть может позволительно назвать *современная математическая статистика, ступени 1 и 2*. Но прежде, чем

попытаться кратко описать факторы, которые, как мне кажется, оказались важнейшими в оформлении моей статистической философии (смеси этих ступеней), я должен постараться отметить то, что мне представляется существенными чертами первой ступени статистического подхода.

**6.1.2. Статистические методы больших выборок.** На это направление исследований повлиял сбор исследуемых материалов *большими выборками*. В 1901 г. в первой редакционной статье первого номера *Биометрики* К. П. и Уэлдон указали, что их журнал будет публиковать

*Мемуары о вариациях, наследственности и селекции животных и растений, основанные на исследовании статистически больших количеств образцов.*

Для формулирования выводов из данных *больших выборок* не требовалось очень уж критически изучать роль теории вероятностей. К. П. несомненно ознакомился весьма основательно с литературой XIX в. В ноябре 1892 г., во вводной лекции в Грешем-колледже, он написал по поводу программы курса (перепечатано в *Биометрике*, т. 32, 1941, с. 89 – 100), см. E. S. Pearson (1938, прил. 2):

*Законы случая, которые являются элементами теории вероятностей в её отношении к мысли и поведению. Определения и фундаментальные понятия. Значимость определений. Отношение нынешнего курса к двум предыдущим о фундаментальных понятиях науки. Статистика и законы случая, органически связанные с основами познания. Полемики. Лаплас, Кетле, Де Морган, Джевонс, Буль, Венн, Эджуорт. Книги, по которым можно справляться: Jevons (1874, гл. 10 – 12); J. Venn (1866, гл. 6 – 12); Эджуорт (1884); De Morgan (1847, гл. 9 – 11; 1838); Whitworth (1867); Westergaard (1890).*

Примечательно, что когда в апреле 1893 г. К. П. заболел, он договорился, что вместо него четыре лекции прочтут Венн, Уитуорт, а также Уэлдон и Rouse Ball<sup>1</sup>. Впрочем, очень скоро, воодушевившись Гальтоном и Уэлдоном, он сам начал участвовать в разработке математических методов, необходимых в биометрии *больших выборок*. Жажда открытий так захватила его, что он стал весьма мало обращаться к этим *фундаментальным понятиям*. Так, 18 февраля 1894 г., обсуждая подгонку нормальной кривой к серии бросков монеты, он написал Эджуорту, см. E. S. Pearson (1965, с. 14):

*Вероятность очень скользка и вполне может быть ошибочна, но я не вполне понял Ваши рассуждения и примеры.*

Биометрические исследования были связаны с исследованием больших выборок, собранных при изучении наследственности и поиском следов действия естественного отбора. Они в основном требовали оценок параметров совокупностей по большим *полевым* выборкам. Эти оценки средних, стандартных отклонений, коэффициентов корреляции и регрессии характеризовались стандартными (или вероятными) ошибками, функциями этих же параметров.



Но, имея дело с большими выборками, статистики не оказывались в беде, если заменяли стандартные ошибки выборочными оценками, например, если использовали  $s/\sqrt{n}$  вместо  $\sigma/\sqrt{n}$ ,  $s/\sqrt{2n}$  вместо  $\sigma/\sqrt{2n}$ ,  $(1-r^2)/\sqrt{n}$  вместо  $(1-\rho^2)/\sqrt{n}$  и т. д. В своих последующих лекциях для статистиков он (!) часто обращал внимание на это обстоятельство. Но он, видимо, не представлял себе, что для установления однородности большой выборки было желательно, как впоследствии подчеркнул Walter Shewhart, разбивать её на разумные подгруппы и проверять их однородность методами малых выборок.

**6.1.3. Для обработки экспериментов небольшого масштаба требовалась новая теория.** В 1906 г. Госсет пришёл в Университетский колледж со своими проблемами истолкования результатов экспериментов малого объёма при химических анализах и культивировании ячменя и пр. для дублинской пивоварни фирмы Гиннес. И только после этого начали проясняться ограничения статистических методов первой ступени.

При изучении подобных проблем фундаментальные понятия о роли теории вероятностей в истолковании статистических данных следовало определить на более строгой логической основе, чем для больших выборок. Сам Госсет, который начал изучать литературу по Эри (1861) и Мерриману (1884), явно полагал, что, будь это возможным, он исходил бы из априорных распределений параметров. Например, в своей статье (1906, с. 36) и в приписке к письму ко мне 25 мая 1926 г.<sup>2</sup> (I, 5) он предлагал принять для  $\sigma$  априорное равномерное распределение.

Только после того, как этой темой занялся Фишер, при развитии математической статистики второй ступени априорные распределения исчезли из вида. Прекрасный обзор отношения трудов Госсета, Эджуорта и К. П. к теории обращённой вероятности составил Welch (1958). Усовершенствовать его я не могу и только добавлю, что Госсет иногда представлял эту тему несколько противоречиво, так что существенной помощи получить от него я здесь не смог.

Лаборатории К. П. не экспериментировали в малых объёмах, и, насколько я помню, кроме Госсета ни один специалист с высшим образованием не обращался к нему извне за помощью в истолковании подобных данных. В рамках интересов К. П. здравые заключения, казалось, основывались на исследовании данных в большом масштабе. Так, он [см. § 5.2] шутливо заметил, что только *озорные пивовары* имеют дело с малыми выборками. Но если допустить, что в течение этих пяти лет Стьюдент задал вопрос своему профессору, как проверить, что стандартные отклонения  $s_1$  и  $s_2$  в двух малых выборках при, скажем,  $n_1 = n_2 = 10$ , независимо отобранных из двух различных нормальных совокупностей, свидетельствуют о значимости расхождений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ? Профессор мог бы сказать, что *ответ невозможен*, или же в качестве ответа появился бы математический критерий, аналогичный  $F$  критерию Фишера.

Но такого вопроса не было задано, вероятно потому, что в работе пивоварни значения  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$  были либо известны по накопленному опыту, либо могли спокойно считаться равными друг другу. Для многих целей схема эксперимента, применяющая разности сравниваемых пар, отвечала требованиям Стьюдента, и только непосредственно перед тем, как Фишер появился в Ротамстеде, Госсет начал представлять себе необходимость того, что стало известно как дисперсионный анализ, см. E. S. Pearson (1939/1970, с. 382 – 390).

Я действительно удивлялся, как К. П. статистически обрабатывал погрешности наблюдений своих студентов факультета прикладной математики [статистики] на двух небольших обсерваториях, которые ему удалось построить в начале 1900-х годов.

В результате этих сомнений о значимости малых выборок в лекциях 1921 г. К. П. приводил вывод Стьюдента величины  $z = (\bar{x} - \mu)/s$ , но не подчёркивал его значимости так же, как распределения  $s^2$  и позднейшего вывода многомерного распределения коэффициента корреляции  $r$ .

**6.1.4. Моё ученичество в Университетском колледже в 1921 – 1926 гг.** После первой мировой войны факультет прикладной статистики, учреждённый в 1911 г., т. е. через год после смерти Гальтона, был формально разделён на биометрическую лабораторию и лабораторию Гальтона (евгеники). Разделения не произошло ни внутри здания, ни в исследованиях, но в течение нескольких лет после первой мировой войны фондами для лаборатории евгеники управлял гальтоновский комитет *университета*, а не колледжа. История разделения факультета отражена в документах, хранящихся в архивах Гальтона и К. П. в Университетском колледже. Я только скажу, что в течение многих лет после 1921 г. до меня не дошло практически никаких количественных данных, кроме стандартных примеров для аудитории. Вполне достаточно материалов можно было бы для этой цели извлечь из предыдущих томов *Биометрики*.

За 1922 – 1927 гг. я опубликовал в этом журнале 9 статей (1922; 1923a; 1923b; 1924; 1925; 1926a; 1927a; 1927b) и, совместно с К. П., статью (1922). Кроме того, я был ответственен за составление *Tracts for Computers* No. 8, 1922. *Table of the Logarithm of the Complete  $\Gamma$ -Function for Arguments 2 to 1200, i. e. beyond Legendre's Range*.

Темы статей (1922; 1923a; 1924; 1927a; 1927b) и совместной статьи, равно как и темы *Tracts ...* мне предложил К. П. Он же предлагал темы большинства исследований, проведенных в течение этих лет в биометрической лаборатории. Статьи (1923b) и (1927b) вероятно были навеяны книгами, которые К. П. дал мне для рецензирования. В статье (1923b) я, возможно, был несколько оригинален, но на самом деле я бросался защищать героя лаборатории, Чарльза Дарвина. Статья (1925) была подсказана статьей К. П. (1920), в которой он последовал подходу Бейеса с его бильярдом. Ниже, я ссылаюсь на сомнения в её обоснованности.

Должно быть в 1922 или 1923 г. я начал длительный *подсчёт*, основанный на довольно остроумной мысли исследовать обоснование Эджуортом равномерных априорных распределений в границах между 0 и 1 своим собственным грубым опытом. Конечно, как указал мне Шеппард во время устного экзамена на степень доктора наук в Лондоне в 1925 или 1926 г., моё собрание нескольких сот результатов, следующих U-образному распределению, фактически *ничего не доказывало*, потому что субъективный элемент неизбежно влиял на отбор выбранных мной для подсчёта признаков (characters).

В той степени, в которой в указанных статьях содержалась теория, она попала в первую ступень, однако некоторые отвлекающие мысли, в основном появившиеся при изучении потока публикаций Фишера, начали, к счастью, возбуждать мои идеи о статистических выводах, относившиеся уже ко второй ступени.

**6.1.5. Сомнения в достаточности теории больших выборок К. Пирсона.** Я понял, насколько обязан этим годам ученичества, когда представил себе широту видения К. П. и ощутил стимул его лекций и в 1921/1922 г., и при личных обсуждениях моих исследовательских проблем, и при длительном составлении таблиц, и, возможно, несколько косвенно от его примерно 10 годичных курсов лекций по истории статистики (1978). Но пришло время, когда мне пришлось пережить болезненно накапливающиеся сомнения в своей прежней вере в отцовскую непогрешимость. Этому способствовал ряд событий; основные из тех, которые остались в памяти, таковы.

1. Критическое восприятие статьи К. П. (1920). Он прислал мне её оттиск, когда я всё ещё был в Кембридже, и в то время я не заметил в нём никаких изъянов. Однако, когда он в лекциях для студентов первого курса во втором семестре 1921/1922 г. пояснял эту тему, стало ясно, что статью уже критиковали. К. П. (1921) сослался на эту критику, но не указал точных источников. Критические замечания опубликовал только Burnside (1924), и там же К. П. (1924a) ответил ему.

Но я помню, что после лекций 1922 г. Ирвин и, возможно, другие [слушатели] обсуждали этот вопрос и заключили, что К. П. (1920) ошибочно приравнял функции  $\phi(\xi)$  и  $f(\xi)$ , которые в общем случае не совпадали.

2. В статье Фишер (1922b) самым тревожным для меня было утверждение, что подгонка кривых плотности *по моментам малоэффективна* по сравнению с применением метода *наибольшего правдоподобия*. Доказательство Фишера опиралось на асимптотическую теорию, и нельзя было сказать, при каком объёме выборки потеря эффективности оказывалась практически существенной. Задача не облегчалась тем, что в то время выводить оценки параметров по методу наибольшего правдоподобия удавалось лишь применением длинного ряда сходящихся, как можно было надеяться, аппроксимаций к оценкам, полученным методом моментов!

Примерно через 50 лет выяснилось, что в конце концов сомнения в верности данной асимптотической теории были вполне обоснованы. Это было установлено экспериментально при помощи случайных выборок из совокупности, подчиняющейся пирсоновской кривой типа III и теоретически (К. О. Bowman & L. R. Shenton, 1970, Union Carbide Corp. Rept CTC 28). Так, при выборках объёма  $n = 200$  асимптотические дисперсии по Фишеру оказались совершенно несоизмеримыми, хоть всё же меньшими, чем выведенные по методу моментов.

3. Фишер (1922с; 1924а) опубликовал статьи, критикующие применение К. П. критерия хи-квадрат, ибо при существовании групп плотностей непрерывная плотность  $e^{-\chi^2/2}$  является лишь асимптотической аппроксимацией разрывных полиномиальных плотностей, и правило степеней свободы невозможно точно проверить.

4. Rhodes (1924) прочёл доклад в Обществе статистиков и биометристов. Ввиду некоторой путаницы с его ссылками показалось, что он доказал, что существуют критерии, основанные на степенях свободы  $\nu = 1, 2$  и  $3$ , каждый из которых может быть применён к одному и тому же выражению хи-квадрат. К. П. (1924b) предположил, что *если существуют два или более критериев, которые в равной мере логически обоснованы*, например, при использовании средних или статистических отклонений или коэффициентов третьих моментов, статистик *всегда должен руководствоваться [...] самым строгим из них*.

*Строгость* можно истолковывать по-разному, но К. П. видимо имел в виду, что статистик должен принимать приговор того критерия, который для данных материалов указывает то, что можно назвать наименьшим  $P$ -значением.

В то время мне неожиданно пришло в голову, что это руководящее правило неприемлемо. И действительно, хоть прошло два года, прежде чем я начал изучать это вопрос, я убеждён своими позднейшими записями, что предложение К. П. сыграло значительную роль в моём решении отыскать более логичный принцип для выбора одного из возможных статистических критериев. Через несколько лет это привело к введению отношения правдоподобия.

5. Книга Фишера (1925с) не представила новый подход в форме, легко приемлемой для математиков. В 1924 г. Фишер (1928) прочёл доклад, математически устанавливающий соотношения между нормальным распределением, распределениями  $t$  и  $z$  (или дисперсионного отношения), установленными по критерию хи-квадрат (chi-squared  $t$ - and  $z$ - (or variance ratio) distributions) и таблицами процентных точек, приведенными в его книге (1925с). Но его статья не была доступна до 1926 г. [до 1928 г.], а оттиск я может быть не видел ещё год или два после этого.

Моя первая ссылка на эту статью приведена в подстрочном примечании в E. S. Pearson (1929, с. 338). Не я один посчитал, что книга Фишера (1925с) трудна, и это видно на примере Barnard (1977). Он сообщает, что ещё в 1933 г., будучи в выпускном классе [Университетского колледжа], он захотел получить совет

об истолковании небольшого статистического исследования, и его отослала к Фишеру. Барнар заметил, что хотел бы заниматься этим предметом и далее, но не отыскал никакой подходящей литературы, Фишер же показал ему экземпляр своей книги и сказал, что *в ней есть много утверждений, которые следовало бы доказать*, но что, как математик, он должен сам отыскать эти доказательства. И если он так и сделает, то научится математической статистике.

*Следующая моя встреча с Фишером, замечает Барнар, произошла почти 20 лет позже. [...] Я смог сказать ему, что только неделю назад более или менее выполнил задачу, которую он поставил мне почти 20 лет назад.*

Ввиду всех этих причин вряд ли удивительно, что в 1925/1926 г. я был в замешательстве и понял, что если уж продолжать свою научную карьеру как математический статистик, то должен буду построить для себя то, что можно назвать статистической философией, т. е. объединить то, что я перенял от традиции К. П. больших выборок с более новыми идеями Фишера.

Лекции по статистике в Университетском колледже К. П. перестал читать вплоть до 1926 г., и я не должен был серьёзно заниматься приведением своих противоречивых мыслей в порядок. Только осенью 1926 г., ввиду проведенной летом операции катаракты, К. П. решил поручить мне чтение части лекций по статистической теории. Я, к счастью, не был чересчур обеспокоен предстоящим преодолением своих трудностей. В то время изучение статистики не было моей всепоглощающей деятельностью. Я был ещё достаточно молод и очень охотно съездил в апреле в Италию в промежутке между составлением письма Госсету 8 марта и получением его ответа 28 мая 1926 г. И я сильно надеялся на пятидневное плавание на яхте своего двоюродного брата по заливам и среди островов северо-западного побережья Шотландии.

Счастливая мысль побудила меня написать своё первое письмо Госсету. Я, конечно, знал его по его посещениям К. П. в Университетском колледже, в последнее время – часто по пути в Ротамстед или к отцовскому дому в Watlington.

**6.2. Трудности с  $z$  и  $\chi^2$ .** Здесь рассматриваются письма группы I, написанные между 7 апреля и 27 мая 1926 г.

**6.2.1. Редакторское введение.** Госсет часто посещал Университетский колледж, когда проезжал через Лондон либо по делам фирмы Гиннес, либо для побывки у своего отца в Watlington. Э. П. было естественно обратиться к нему по поводу затруднений и с  $t$ , и с  $\chi^2$ . Самое раннее сохранившееся письмо Э. П. (I 1) датировано 7 апреля 1926 г., но оно не было отправлено до 5 мая, до окончания отдыха в Италии. Он начал письмо с описания своего недавнего посещения фруктовой [экспериментальной ?] станции в East Malling в графстве Кент. Блуждая по участкам яблонь, он неожиданно усомнился в точном истолковании величины  $z = (\bar{x} - \mu)/s$ . Здесь  $\bar{x}$  – среднее, а  $s$  – стандартное отклонение выборки объёмом  $n$  из нормального распределения со средним  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Он растерялся, потому что в двух

выборках можно было иметь выборки [ $n$ -мерные векторы, sample points]  $A_1(\bar{x}_1, s_1)$  и  $A_2(\bar{x}_2, s_2)$ , притом что  $A_1$  произойдёт с более низкой вероятностью, чем  $A_2$  при  $z_1$ , меньшем, чем  $z_2$  и потому более вероятным.

Он представил себе эту проблему диаграммой совместной плотности  $f(\bar{x}, s|\mu, \sigma)$ , по необходимости вычерченной в шкале (on the scale) неизвестного  $\sigma$ .

*Что нам говорит распределение  $z$ ? Мне представляется, что мы вряд ли сможем применить его как сравнительный критерий. Если даны две выборки  $A_1$  и  $A_2$ , мы не сможем сказать, что  $A_1$  было более вероятно чем  $A_2$  отобрано из совокупности со средним  $\mu$ , потому что  $z_1 < z_2$ , разве только мы примем какую-либо гипотезу о возможных априорных значениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Это, естественно, предостерегает от попыток (shuns attempting).*

*Я, конечно же, весьма вероятно попытаюсь добыть что-то из распределения, чего я не должен делать, и Вы сможете поправить меня. Но я начинаю чувствовать, что по существу нельзя применять никакого критерия согласия или вероятностей случайного отбора (random sampling), если не знать констант [параметров] совокупности или если не быть готовым рисковать тем, что они окажутся существенно отличными от некоторых предположенных [значений]. В малых выборках риск очень велик.*

То был период Всеобщей стачки, и в ночь с 10 на 11 мая Госсет (письмо I 3) заявил, что ввиду трусливого правительства и педантичного профсоюза письмо Э. П. пришло только что. На следующий день он (письмо I 4) ответил подробно.

*Фактически всё, что Вам следует знать, это что 1) совокупность нормальна и 2) заданная единственная выборка имеет стандартное отклонение и среднее в известной точке по шкале  $s$ .*

*Нас спрашивают, каков шанс того, что среднее совокупности находится на любом заданном расстоянии  $z$  от того среднего, измеренного в этой шкале. Нарисовав поверхность корреляции (в соответствии с совокупностью), на которую Вы обратили моё внимание, в шкале  $\sigma$ , у нас вовсе не будет никаких средств соединить  $\sigma$  и  $s$  или даже точно соединить точку  $\bar{x} = \mu$  со средней выборки. Мы только сможем выяснить, что произойдёт, если эта точка находится на заданном расстоянии в шкале  $s$  от выборочной средней.*

Он далее указал, что положение  $A_1$  и  $A_2$  на диаграмме Э. П. не имело отношения к делу, потому что положение действительных выборок было неизвестно, но что объём под поверхностью  $y = f(\bar{x}, s|\mu, \sigma)$  вне сечения, вдоль которого  $z$  постоянно, можно было вычислить и применить как обоснованный критерий.

Затем Госсет принялся *рассматривать дело с другой стороны* и при этом ввёл понятие альтернативных гипотез и поставил вопрос о выборках из не-нормальных распределений. И то, и другое повлияло на выбор направления последующих трудов Э. П. Выдержку из этой части письма Госсета процитировал Э. П. в двух статьях (1939, письмо I; 1966)<sup>3</sup>.

Трудности, относящиеся к критерию согласия  $\chi^2$ , составляют другую тему писем первой группы. Этот критерий предложил

Пирсон (1900) для исследования согласия между наблюдаемой и ожидаемой частотами при условии, что параметры, использованные для вычисления последних, указаны гипотезами. Если же параметры оцениваются по выборке, то, как он заявлял, заключение о принятии или отклонении будет таким же, будто распределение было известно априорно.

В ряде статей, опубликованных между 1922 и 1924 гг., Фишер усомнился в этом мнении и видоизменил первоначальный критерий, применяя понятие *степеней свободы*, число, которое убывало на единицу с каждым действенно оцененным параметром. Bartlett (1981) процитировал письмо Э. П. от 30 марта 1929 г.:

*Я давно уже знал, что К. П. применял верные степени свободы при [исследовании] а) разности между двумя выборками и б) многомерных таблиц сопряжённости признаков. Но он не смог заметить, что при подгонке кривых хи-квадрат следует асимптотически привести в ту же самую категорию. [...]*

Письмо Э. П. [Госсету] 7 апреля 1926 г., в котором он выразил свои сомнения об использовании  $z$ , заканчивалось наброском аналогичной трудности в отношении  $\chi^2$ :

*Та же проблема, как мне кажется, возникает в методе Фишера исследования распределения  $\chi^2$ . Он рассматривает распределение, которое определяется, если составлять повторные выборки и в каждом случае указывать значения  $\chi^2$  вычисляемых констант (put into  $\chi^2$  the values of constants), получая, например,  $\chi_2^2$  вместо истинных значений совокупности, которые привели бы, например, к  $\chi_1^2$ . Если его алгебра и предположения верны, он получает определённое распределение  $\chi_2^2$ , отличное от  $\chi_1^2$ , которое мы установили бы при использовании констант истинной совокупности.*

*Но какова значимость этого распределения? Я чувствую себя очень неуверенно. Так же, как в случае Вашего распределения  $z$ , мне представляется, что если в неизвестной совокупности значения констант могли изменяться в некоторых пределах, то вполне могло бы существовать много выборок, которые, приводя к более значительным  $\chi_2^2$  чем другие выборки, всё же окажутся более частыми (of more frequent occurrence), о чём свидетельствовали бы истинные значения  $\chi_1^2$ , будь они известны.*

*В соответствии со старым методом предполагается, что наши константы, определённые по выборке, лишь немного отличаются от значений для совокупности, так что константы, вычисленные по ним, не будут существенно отличаться от истинного распределения  $\chi_1^2$ . Я думаю, что это может привести к систематической ошибке, поскольку, вообще говоря,  $\chi_2^2 < \chi_1^2$ , что в общем вовсе не серьёзно кроме как в случае, при котором лишь к нескольким группам подгоняется весьма растяжимые (elastic) кривые. Но мне кажется, что разумнее было бы*

исправлять  $\chi_2^2$ , прибавляя среднюю разность  $\chi_1^2 - \chi_2^2$  для выборок с  $n$  категориями, чем применять  $\chi_2^2$  в распределении с  $n - p$  категориями, т. е. чем применять распределение, которое следует истолковать, — ну, я не знаю, как.

Госсет ответил 25 мая (письмо I 5); задержка была вызвана необходимостью в какой-то степени понять основную статью К. П.

*Я сейчас прочёл статью К. П. (1900). Её можно подразделить на три части. Одну я могу понять как человек, который способен перочинным ножом грубо изготовить остов лодки из куска дерева, может оценить модель яхты, вырезанную и оснащённую в должном масштабе<sup>4</sup>. Вторую часть я могу лишь сравнить с волшебным трюком, ключа к которому у меня нет (например, переход к полярным координатам на с. 158). И, наконец, есть очень небольшая [третья] часть, которую, полагаю, я могу понять.*

*К счастью или, скорее, к несчастью, есть одно предложение в конце с. 160, которое, как представляется, оправдывает Фишера. Можно считать, что есть что-то, обманувшее меня во всём наборе трюков на двух последующих страницах, но я предложу это Вам (и посоветую просмотреть саму эту классическую статью):*

*“Если погрешность равна  $e = t_1 - t$ , то*

$$e_1 + e_2 + \dots + e_{n+1} = 0$$

*и поэтому из  $(n + 1)$  ошибок переменных только  $n$ . Если первые  $n$  известны, то при обращении к формуле (ii) мы имеем дело только с  $n$  переменными”.*

*Как я понимаю, эти слова Фишера означают следующее. Я беру, во-первых, простейший возможный случай, при котором мы подогнали, скажем, Пуассона к множеству наблюдений и естественно принимаем среднее. Поскольку мы приравняли среднее значение  $t$  к  $t_1$ , мы здесь только имеем*

$$e_1 + e_2 + \dots + e_{n+1} = 0, \quad (a)$$

$$e_2 + 2e_3 + \dots + ne_{n+1} = 0. \quad (b)$$

*Совершенно таким же путём [мы получаем, что] только  $(n - 1)$  ошибок из  $(n + 1)$  являются переменными (не следует ли нам теперь говорить независимыми?), потому что  $(n + 1)$ -е определяется уравнением (a), а  $n$ -е — уравнением (b) если остальные известны.*

*Далее, если для подгонки кривой применяется второй, третий, четвёртый момент, мы получим третье, четвёртое или пятое уравнение с величинами  $e$  и каждый раз ограничиваем число тех, которые могут изменяться независимо, на единицу.*

*Если Вы согласитесь с этим, остальная часть доказательства, видимо, не изменяется (хотя для меня оно относится к магическому трюку) и приводит к результату Фишера.*



28 мая (письмо I 6) Э. П. очень подробно описал эту проблему и свои затруднения. Он различал  $\chi_1^2$ , вычисленное по  $s$  определённым вероятностям и связанное с плотностью

$$f(\chi_1) = C \chi_1^{s-2} \exp(-1/2 \chi_1^2)$$

и  $\chi_2^2$ , вычисленное после оценки  $s$  параметров и, при тщательно указанных условиях, связанное с плотностью

$$f(\chi_2) = C \chi_2^{s-2-c} \exp(-1/2 \chi_2^2).$$

Он сложным образом описывает соотношение между  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$ , но два обстоятельства представляются понятными:

1. Доказательства Фишера не убедили его.
2. Он по-прежнему соглашался с К. П. по поводу оценок.

Учитывая существовавшие обстоятельства, его вывод вряд ли был удивителен.

*Я описал всё подробно, но это помогает мне самому ясно видеть картину, и я надеюсь, что Вы последуете за мной. В Вашем письме Вы показываете, что пришли к первой ступени, к которой я подошёл несколько раньше, когда невнимательно изучал Фишера и считал, что его рассуждение вероятно обосновано. Думаю, что многие вначале пришли к тому же, потому что приехавшие сюда американцы наверняка представили себе эту идею. В этом-то и заключается опасность. Я не могу сказать, пришли ли те, которые переходят ко второй ступени, читают Фишера внимательно и размышляют о логике и вероятности, к моему выводу или нет, потому что до сих пор я не встретил ни одного, кто бы согласился со мной. Но хотел бы иметь такую возможность.*

**6.2.2. Комментарий Э. Пирсона.** Я сейчас не могу вспомнить, в чём именно выражались мои сомнения, которые вдруг охватили меня в East Malling, но они возникли бы там естественно при истолковании результатов, полученных по небольшим экспериментальным участкам. Мне представляется, что я вижу себя, сидящим одиноко у входа [в яблоневый участок] и обдумывающим основы теории *малых выборок и второй ступени математической статистики*.

Когда почти через 30 лет я (1955) опроверг предположение Фишера о том, что подход Неймана – Пирсона к проверке статистических гипотез возник при [обсуждении] приёмочного контроля в промышленности, участок, видимый от того входа, с прошедшего времени превратился в участок [кисловатой] чёрной смородины.

Письмо I 1 ясно показывает, что мой подход к критериям  $z$  или  $t$  всё ещё находился под влиянием взглядов К. П.: о значимости статистики, следует судить главным образом по её распределению в выборке из полностью определённой совокупности. Однако, как он считал, в больших выборках значения параметров совокуп-

ности, если они неизвестны, можно без большого риска ошибки заменять оценками по выборке.

По этой причине, находясь в замешательстве, я *вначале* обратился к двумерному выборочному распределению  $f(\bar{x}, s|\mu, \sigma)$ , а *затем* к распределению  $f(z)$  от  $z = (\bar{x} - \mu)/s$ . Я недоумевал, потому что эти два критерия могли по-разному оценивать значимость двух независимых выборок. Уместно заметить, что К. П. (1931а) всё ещё ощущал аналогичное отношение к критерию  $z$  Стьюдента и критиковал его применение Госсетом в связи с ланаркширским экспериментом.

Ответное письмо Госсета I 4 сразу же несомненно и убедительно указало, что моё введение распределения  $f(\bar{x}, s|\mu, \sigma)$  было неуместным, поскольку существо проблемы состояло в том, что  $\sigma$  было неизвестно. Я вряд ли был удовлетворён его конкретным доводом в пользу применения  $z$ , но его письмо привело меня к двум основополагающим идеям:

1. Рациональное мышление не отвергает гипотезу до тех пор, пока не сможет придумать хотя бы одну правдоподобную *альтернативную* гипотезу.

2. Желательно исследование чувствительности его критерия  $z$  по отношению к отклонениям совокупности от нормальности.

Этот вопрос Г. Е. Р. Вох позднее назвала *робастностью* [устойчивостью].

В ответе Госсета было замечание, которое я мог бы с пользой исследовать, но не сделал этого. Он написал:

*Но мы можем держать пари о вероятности среднему совокупности находиться внутри любого заданного расстояния от известного выборочного среднего [...].*

Он явно основывался на обращённой вероятности, которая, как было упомянуто, появилась в его статьях (1908а; 1908b).

Наше обсуждение этой темы летом 1926 г. могло привести к тому факту, что утверждения

$$P[z = (\bar{x} - \mu)/s < -z_{\alpha/2}] = \alpha/2, P[z = (\bar{x} - \mu)/s > z_{\alpha/2}] = \alpha/2,$$

где  $z_{\alpha/2}$  – верхняя  $100 \cdot \alpha/2$ -я процентиль распределения  $z$  при  $v = n - 1$  степенях свободы, можно обратить в равенства

$$P[\bar{x} + sz_{\alpha/2} = \mu_1(\bar{x}, s) > \mu] = \alpha/2, P[\bar{x} - sz_{\alpha/2} = \mu_2(\bar{x}, s) < \mu] = \alpha/2$$

и потому

$$P[\mu_1(\bar{x}, s) < \mu < \mu_2(\bar{x}, s)] = 1 - \alpha. \quad (A)$$

Если вычисление переменных пределов  $\mu_1(\bar{x}, s)$  и  $\mu_2(\bar{x}, s)$  можно считать правилом поведения при отборе выборки объёмом  $n$  из любой нормальной совокупности, тогда (A) привело бы к *доверительному интервалу* Неймана для неизвестного  $\mu$ . Конечно, определяя заново

$$s^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 / (n-1) = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 / \nu$$

и подставляя  $t/\sqrt{\nu}$  вместо  $z$ , пределы  $t_{\alpha/2}$  в 1926 г. могли быть выбраны из книги Фишера (1925с, табл. IV) при  $1 - \alpha = 0,90, 0,95$  и  $0,99$ .

Но философское обоснование ещё не появилось, ещё не стало ясно, что в конце концов последствия *правила поведения* могут повлиять на суждение о единственной выборке наблюдений. Возможно потому, что Фишер не признавал этой философии, он и ввёл понятие *фидуциальной вероятности*.

Основываясь на аналогичном рассуждении и применяя таблицу Фишера III для процентилей  $\chi^2$ , конечно можно было в 1926 г. выводить доверительные пределы для  $\sigma^2$  по  $s^2$ . Главной причиной для составления и публикации таблицы процентилей для  $t$  и  $\chi^2$  быть может было нежелание К. П. разрешить Фишеру перепечатать таблицы вероятностей этих статистик, авторское право на которые принадлежало *Биометрике*<sup>5</sup>, но интересно заметить, что такая новая форма таблиц облегчала пояснение и практическое применение понятия *правила поведения* при выводе доверительных пределов.

Так, в 1932 г. Waclaw Pitkowski, руководствуясь лекциями Неймана в Варшаве, вывел доверительный интервал для среднего на основе распределения  $t$ . Он смог получить  $t_{0,025}$  для  $\nu = 4$  по таблице Фишера (1925с), – или, быть может по изданию 1928 г. этой книги. Без этой таблицы ему пришлось бы интерполировать назад по одной из таблиц функции распределения  $z$  Стьюдента (1908а; 1917) или вероятности  $t$  (1925b или 1925с). Я не знаю, повлияло ли как-то на Неймана наличие таблиц фишеровского типа, когда он пояснял в варшавских лекциях свои идеи о доверительном интервале.

Никаких своих комментариев на письмо Госсета I 4 не сохранилось, но летом и осенью 1926 г. я наверняка несколько размышлял о его предложении по поводу *альтернативных гипотез*. В письме 25 мая (I 5) он сообщил мне свои мысли о споре по поводу степеней свободы в связи с  $\chi^2$ , на которые я ответил через три дня в письме I 6. Это дало мне возможность изложить свои затруднения в письменном виде, и здесь также я несомненно был в некотором замешательстве. Если попытаться задним числом привести сводку своих затруднений, то она будет выглядеть так.

В проблеме критерия  $z$  мой геометрический подход привёл меня к представлению положения в двумерном  $(\bar{x}, s)$  пространстве. Я был знаком со статьей К. П. (1900), в которой он указывает, что  $\chi$  постоянно на гиперэллипсоидальных изолиниях в  $k$ -мерном пространстве ( $k$  – число групп плотностей). Поэтому я неизбежно должен был представить группированную выборку точкой  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  в этом пространстве с единым линейным ограничением: сумма  $n_i$  должна была быть равна объёму выборки. Если в совокупности известны  $k$  ожиданий  $\bar{n}_i$ , то  $P$  в критерии

было функцией распределения плотности falling beyond the hyperellipsoid on which the sample point fell.

Но если ожидания  $m_i$  были получены подгонкой кривой к выборочным плотностям, какие же логические причины, как я спросил, существуют для применения

$$P' = \int_{\chi_2}^{\infty} f(\chi_2) d\chi_2 \div \int_0^{\infty} f(\chi_2) d\chi_2$$

в качестве критерия согласия? Здесь  $\chi_2$  и  $f(\chi_2)$  определены формулами (ii) и (v) моего письма I б.

Предполагая, что асимптотически распределение  $\chi_2$  при уменьшенном числе степеней свободы верно, если  $m_i$  выведены методом *наибольшего правдоподобия*, то существует и распределение  $\chi_2$  при подгонке по *моментам*, скажем, интеграл  $P''$ , хоть, возможно, его и нелегко вывести. И я инстинктивно недоумевал, почему, кроме как для удобства в получении интеграла  $f(\chi_2)$  с его уменьшенным числом степеней свободы, – почему  $P'$  будет лучше основывать суждения, чем  $P''$ . Это было второй ступенью с относящимся к ней вопросом, на который я не смог отыскать ответа.

Только позднее, введя принцип отношения правдоподобия, который нравился мне в геометрических терминах, я понял, что, если подгонка основывалась на сведении  $\chi^2$  к минимуму, то можно будет показать, что асимптотически  $P''$  является интегралом в  $k$ -мерном пространстве вне огибающей гиперсфер с центрами, движущимися только в  $(k - c)$ -мерном первоначальном пространстве (prime). Вот так, в 1927 – 1928 гг. я удовлетворился с помощью Неймана.

С Госсетом я по этому поводу более не переписывался, и после моих писем мая 1926 г. наступил шестимесячный разрыв, относительно которого никаких письменных записей о развитии моих размышлений не сохранилось.

**6.3. Порядковые статистики и размах.** Здесь рассматриваются письма группы II периода 16 апреля 1926 – 23 марта 1927 г.

**6.3.1. Редакторское введение.** Исследования наследственности привели Гальтона к идеям порядковых статистик и процентилей. Первый том *Биометрики* содержит его мемуар (1902) о *Наиболее желательном соотношении между первой и второй премиями*, а в сопроводительной заметке К. П. исследовал определение средней разности между  $p$ -й и  $(p + 1)$ -й порядковыми статистиками в выборке объемом  $n$ .

В дальнейшем тогдашние сотрудники биометрической лаборатории Igwin (1925a) и Tippett (1925) изучали соответствующие распределения. 16 апреля 1926 г. (письмо II 1) Госсет попросил совета у Э. П.:

*Посетив лабораторию несколько дней назад, я узнал, что Вы исследуете распределения размаха в малых выборках, что, видимо, обеспечит возможное решение проблемы отклонения или повторения наблюдений. Я обращаюсь к Вам на случай, если Вы смогли бы помочь мне с моим конкретным затруднением. Я*

занимаюсь вопросом о том, когда целесообразно повторять обычный химический анализ, уже произведенный дважды либо потому, что такова обычная практика, либо ввиду того, что первый результат оказался примечательным.

И та же проблема у нас оказалась с трёх- и четырёхкратными анализами. Последние особенно закономерно производятся для некоторых договорных выборок, которые всегда анализируются четырежды, а при повторях мы получаем пяти- и шестикратные и т. д. выборки. Мы очень внимательно исследуем погрешности наших анализов и для наших целей мы можем считать, что стандартная ошибка известна.

С парами (предполагая нормальность распределения погрешностей) у нас поэтому особых затруднений нет, поскольку их разность подчиняется нормальному распределению с известным стандартным отклонением  $\sigma\sqrt{2}$ .

В случае тройных опытов таблица Ирвина (1925b, с. 241) предоставляет возможность оценки маловероятности одному из анализов намного отличаться от двух других, а если окажется необходимым, полагаю, что смогу вычислить константы размаха выборок объёмом 3; *если не ошибаюсь* (что возможно, и я хотел бы узнать Ваше мнение об этом), разности  $x_1 - x_2$ ,  $x_2 - x_3$ , и  $x_3 - x_1$ , если они вычислены по бесконечному числу выборок объёмом 3, в целом окажутся нормальной совокупностью разностей. Этот факт, учитывая существование таблицы Ирвина (1925a, с. 107), позволяет вычислить всё простой алгеброй. Кстати, среднее значение разности между первым и вторым элементами, 0,8458, которое Ирвин, видимо, принял из ранней статьи Вашего отца, должно было быть, как я полагаю, 0,8463 ( $= 3/[2\sqrt{\pi}]$ ), но расхождение не существенно.

Но при переходе к выборкам объёма 4, или, если повторения были продолжены, объёмами 5 и 6, никаких опубликованных таблиц размаха распределения или внешнего интервала не существует. Если Вы вычислили какие-либо подобные таблицы, я был бы очень рад воспользоваться ими.

На следующий день он написал снова (письмо I 2 [II 2]), сообщив, что наткнулся на теорему, соединяющую  $\chi_{n,p}$  среднюю разность между  $p$ -й и  $(p + 1)$ -й порядковыми статистиками, и  $r_n$ , средним размахом, и то, и другое для выборок объёмом  $n$ . Остальные письма группы II устанавливают, что эта теорема оказалась бесполезной, и рассматривают числовые проблемы подгонки кривых Пирсона.

**6.3.2. Комментарии Э. Пирсона.** Госсет неизменно изучал статьи из *Биометрики*, чтобы выяснить, не помогут ли их теории или содержащиеся в них таблицы анализировать данные, которые следовало истолковывать для дублинской пивоварни. Теория в трёх статьях Irwin (1925a; 1925b) и Tippett (1925) предполагала, что совокупность, из которой отбирались выборки, была нормальной, и что её стандартное отклонение было известно. Как пояснил Госсет (письмо II 1 от 16 апреля), он интересовался обычными химическими анализами, при которых до оценивания среднего было желательным отбросить как бы отдалённые наблюдения и

если предшествовавший опыт позволял достаточно точно знать стандартные ошибки хорошо проведенных анализов.

Число наблюдений в выборке должно было быть равным двум или даже шести и более. Госсет, видимо, хотел бы действовать так же, как рекомендовал позднее (1927, с. 161 – 162): сравнивать размах полной выборки с известным по предположению стандартным отклонением и отбрасывать наблюдения, одно за другим, считая их отклоняющимися<sup>6</sup>, пока отношение размаха оставшихся  $n - 1, n - 2, \dots$  к  $\sigma$  не становилось меньше установленного верхнего предела распределения  $w/\sigma$ .

Ирвин (1925a; 1925b) привёл приближённое выборочное распределение расстояния между первыми двумя порядковыми статистиками, например, между  $\chi_{n,1}$  и  $\chi_{n,2}$  в функции  $\sigma$ , но не продвинулся далее. Типпет (1925) вычислил среднее значение  $w/\sigma$  с пятью знаками после запятой для  $n = 2(1)1000$ , однако стандартные отклонения  $w/\sigma$ ,  $\beta_1(w)$  и  $\beta_2(w)$  указал только для  $n = 2, 10, 20, 60, 100, 200, 500$  и  $1000$ , притом менее точно.

Для применения его критерия отбрасывания наблюдений Госсет должен был знать распределение  $w/\sigma$  по крайней мере для  $n = 3, 4$  и  $5$ . В письме П 2 от 17 апреля он полагал, что отыскал решение, выразив средние интервалы  $\chi_{n,p}$  между  $p$ -м и  $(p + 1)$ -м элементами в функции средних размахов  $r_n, r_{n-1}, \dots$  которые вычислил Типпет. В позднейших обозначениях  $r_n$  заменено на  $E(w_n)$  и т. д. Он определил выражения для  $\chi_{n,1}, \chi_{n,2}$  и в типичной *стьюдентовой* манере угадал, что можно их обобщить:

$$\chi_{n,p} = \frac{n!(-1)^{p-1}}{2p!(n-p)!} [r_n - nr_{n-1} + \dots + \frac{(-1)^q}{(n-q)!} r_q + \dots + (-1)^p r_{n-p}] =$$

$$\frac{1}{2} \frac{n!}{p!(n-p)!} (-1)^p \Delta^p r_{n-p}.$$

Я обосновал эту *догадку* и по предложению Госсета опубликовал её в замечании (1926а, с. 193 – 194), заменив по Типпету его обозначение  $r$  на  $w$ . [Первая строка формулы сомнительна.]

Следующее письмо Госсета ко мне 28 апреля (П 3) показывает, что он уже понял, что разностное уравнение ни к чему не приводило, потому что он не смог применить его для определения моментов высших порядков  $\chi_{n,p}$ , которые были нужны ему для оценивания распределений этой величины и получения критических пределов для правила *отбрасывания*. Но к тому времени печаталась моя статья (1926а), и Госсету удалось заполнить разрыв, оставленный Типпетом при  $n = 3, 4, 5$  и  $6$ , подогнать кривые Пирсона, используя среднее  $w$  и аппроксимировать  $\sigma(w)$ ,  $\beta_1(w)$  и  $\beta_2(w)$  [см. прим. 14 гл. 4]. Используя эти результаты, он вывел уровни значимости  $\gamma$  для  $w/\sigma$  и применил их в предложенной процедуре отбрасывания наблюдений (1927). Попытка, описанная в письмах П 1 – 6, оказалась ненужной, но этот эпизод иллюстрирует желание Госсета приспособить опубликованные другими авторами теории и таблицы к практической проблеме пивоварения.

Письма II 8 и 9 (март 1927 г.) показывают, что я уже хотел применить его эмпирические кривые для аппроксимирования распределения размаха в выборках с  $n = 10$  (E. S. Pearson & Adanthaya 1928, последняя строка с. 357 и табл. 1) в своём первом отчёте об экспериментальных выборочных исследованиях 1927–1928 гг. на факультете [прикладной] статистики. Более подробное исследование этого распределения я опубликовал позднее (1932).

Письма II 1–8 имеют отношение к следующим статьям.

а) Irwin (1925a). Автор вывел моменты разностей между  $p$ -й и  $q$ -й порядковыми статистиками в выборках из нормальной совокупности. Единицей измерения было стандартное отклонение  $\sigma$  совокупности.

б) Irwin (1925b). Снова  $\sigma$  должно было быть известно. Автор предупредил, что в малых выборках замена  $\sigma$  на  $s$  приводит к погрешности. Он привёл три примера, в первом из которых обсуждал 15 астрономических наблюдений (Chauvenet 1863), а в остальных – 17 и 424 наблюдения.

в) Tippett (1925). Проблема, которую он изучил, уже была в некоторой степени рассмотрена, но его исследование и теоретической части, и применения вычислительных процедур, и проверки случайными выборками было более тщательным. Он привёл таблицу среднего размаха [средних размахов] с пятью знаками после запятой для  $n = 2(1)1000$  в единицах стандартного отклонения совокупности  $\sigma$ , вычислил значения  $\sigma(w)$ ,  $\beta_1(w)$  и  $\beta_2(w)$  для  $n = 2, 10, 20, 60, 100, 200, 500$  и  $1000$  с тремя знаками после запятой, заметив, что последняя цифра значений  $\beta_1$  и  $\beta_2$  была ненадёжной.

Его таблица средних размахов позволила применить размах в отдельном случае и средний размах нескольких выборок одного и того же объёма в проблемах приёмочного контроля. Он кроме того подготовил таблицу случайных чисел, которую факультет [прикладной статистики] опубликовал в 1927 г. как *Tracts for Computers* № 15. Это послужило значительным стимулом для исследований, применяющих моделирование выборочного метода.

г) E. S. Pearson (1926a). Основной целью статьи было дополнение значений  $\sigma(w)$  у Типпета для  $n = 3, 4, 5$  и  $6$  и вычисление оценок  $\beta_1(w)$  и  $\beta_2(w)$  для тех же значений  $n$ , а также повышение точности значений этих трёх (?) моментов для выборок с объёмами, исследованными Типпетом.

д) Student (1927). На с. 162 приведена таблица приближённых процентилей  $100 \cdot 10$ ,  $100 \cdot 5$  и  $100 \cdot 2$  для  $w/\sigma$  при  $n = 2(1)10$ . Для значений  $n = 2(1)6$  и  $10$  применялись квадратуры кривых Пирсона с моментами, указанными в статье E. S. Pearson (1926a), а для  $n = 7, 8, 9$  – интерполяция.

**6.4. Случайные числа и выборочные эксперименты.** Здесь рассматриваются письма группы III периода 13 мая 1927 – 7 декабря 1928 г.

#### **6.4.1. Введение (Э. Пирсона)**

**6.4.1.1. Вычисления и случайные числа.** Было бы полезно предварить обсуждение этих писем более подробным описанием работы биометрической лаборатории в 1920 – 1925 гг. Южная часть здания Bartlett Building [...], построенная в 1914 г. была

предоставлена вновь учреждённому факультету прикладной статистики, но с началом войны она была отдана госпиталю Университетского колледжа. Только с 1920 г. новая часть здания стала использоваться по своему первоначальному назначению. Имея в виду разделение евгенической лаборатории Гальтона и биометрической лаборатории, интересно зафиксировать результаты некоторых исследований в этой второй лаборатории.

Математические таблицы, которые составил К. П. для исследования траекторий [авиа]бомб и снарядов противовоздушной обороны для Адмиралтейства и Министерства военного снаряжения, навели его на мысль о публикации серии *Tracts for Computers*. В неё входили и некоторые предварительные разделы громадных таблиц, задуманных Томсоном (A. J. Thomson, *20-Figure Logarithm Tables*).

К 1925 г. было составлено примерно 10 – 12 весьма разнообразных выпусков этой серии. Так, в 1922 г. было, наконец, окончены и опубликованы таблицы неполной гамма-функции (*Tables of the Incomplete Gamma Function*). Можно сказать, что работа по составлению родственной таблицы *Tables of the Incomplete Beta Function* всерьёз началась с исследования вычислительных методов Сопером в № 7 этой серии (1921 г.), хотя окончательная таблица, составленная в результате большой совместной работы, появилась лишь в 1934 г.

Остальную деятельность этой лаборатории, её персонала и исследователей в течение указанных активных лет можно проследить по журналу *Биометрика*. Так, Ирвин опубликовал две статьи о распределении интервалов между *порядковыми статистиками*, см. § 6.3.1. Появилось несколько попыток исследовать поверхности плотности, отличной от двумерных нормальных плотностей. Много внимания было уделено выборочным моментам моментов вплоть до результатов, относящихся к малым выборкам. В связи с этим были [составлены ?] таблицы математических функций, но попыток применения этих результатов не предпринималось.

В середине 1920-х годов открылось новое направление исследований, которое можно иллюстрировать публикацией двух [трёх – О. Ш.] статей:

а) Church (1925; 1926). Во второй из них были проведены эксперименты по случайным выборкам, чтобы проверить, пригодны ли кривые Пирсона с верными четырьмя первыми моментами для подгонки распределений дисперсии в выборках объёмом  $n = 10$ , полученных экспериментально из нормальной и не-нормальной совокупностей.

б) Tippett (1925). Здесь исследовались распределения крайних элементов и размаха ( $w = x_{(n)} - x_{(1)}$ ) в выборках объёмом  $n = 2, \dots, 1000$  из нормальной совокупности.

Исследования распределения размаха оказались исключительно полезными в связи с приёмочным контролем качества и для различных применений методов, которые J. W. Tukey назвал *быстрыми и неприятными* (quick and dirty). Общим в обоих указанных направлениях исследований была необходимость в



каком-нибудь сравнительно быстром методе отбора искусственных случайных выборок из определённой совокупности.

В 1906 г. Стьюдент испробовал извлечение картонных билетов, что оказалось не вполне удачным ввиду трудности их достаточного перемешивания между тиражами (с возвращением)<sup>7</sup>. И Чёрч, и Типпет пришли к тому же выводу. Первый пытался применить цветные бусинки, причём цвета соответствовали группам наблюдений в совокупности. Но бусинки различных цветов чуть различались по величине, и тиражи искажались.

И тут К. П. предложил Типпету приготовить список *случайных чисел*, которые впоследствии появились в печати (1927), но и Типпет, и Чёрч сразу же начали пользоваться ими. В предисловии к этому *Трактату* К. П. написал:

*В последние годы очень много труда было потрачено на проверку различных статистических теорий при помощи искусственных случайных выборок. Во многих случаях сама теория может быть лишь приближённой, либо математически верной при  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  – объём выборки. В первом случае желательно иметь какой-то практический опыт в степени аппроксимации, во втором – следует удостовериться, какие значения  $N$  можно в статистической практике считать приближающимися к бесконечности.*

*В некоторых случаях оба пожелания объединяются, как, например, когда мы предполагаем, что данная корреляционная таблица практически относится к [двумерному] нормальному распределению и определяем вероятную ошибку её коэффициента, полагая, что в малых или даже средних по объёму выборках он следовал нормальному закону распределения.*

Вот начало второго параграфа предисловия:

*Чтобы преодолеть затруднения при случайном отборе выборки для экспериментальных целей, директор биометрической лаборатории [К. П.] предложил Типпету, который маялся со своими билетиками, заменить всю их систему единой системой случайных чисел от 0000 до 9999. Будь эти числа действительно случайны, их можно было бы применять в самых разнообразных случаях для получения искусственных выборок.*

*Для составления этой таблицы случайных чисел из отчётов переписи населения было случайно отобрано 40 000 цифр, которые затем объединили по 4, образовав 10 000 [четырёхзначных] чисел.*

К. П. привёл три примера применения этих чисел

1. Для составления выборок объёма 10 из группированного нормального распределения.
2. Для составления выборок объёма 100 (с возвращением) из таблицы 2 на 2.
3. Для составления выборок из таблицы 5 на 6 сопряжённости признаков.

**6.4.1.2. Выборочные эксперименты и изучение устойчивости: работы пивоваров фирмы Гиннес.** Существование этих случайных чисел предоставило возможность, о которой вряд ли раньше мечтали, а именно возможность осуществлять самые разнообраз-

ные эксперименты, и, особенно, глубоко и широко исследовать устойчивость критериев *теории нормальности*, основанных на  $z$  (или  $t$ ),  $s^2$ ,  $r$  и  $\chi^2$ . На это указал мне Госсет в письме 11 мая 1926 г. (I 4).

В 1927 г. я приступил к выполнению этой программы, и результаты начали появляться в *Биометрике* в 1928 – 1931 гг. Многие помогали мне при составлении выборок и вычислениях, и особенно аспирант N. K. Adyanthaya, который в 1927 – 1929 гг. прослушал двухгодичный курс статистики и работал со мной.

Моя переписка с Госсетом, собранная в группе III, содержит много ссылок на эту программу. Особо интересным Госсету было исследование выборочного метода, которое выполнил G. F. E. Story и опубликовал под псевдонимом (Sophister 1928). По примеру командирования Госсета в 1906/1907 г. в Лондон для изучения статистики под руководством К. П., в 1922 г. фирма Гиннес, несомненно по его рекомендации, послала Эдуарда Самерфильда к Фишеру в Ротамстед. Затем, в 1927 г., было предложено [кем?] послать Стори на длительное время в период 1927/1928 г. в Университетский колледж под руководство К. П. Для Стори, как и для Госсета, было условлено, что посещение лекций будет у него сочетаться с накоплением опыта при составлении сопутствующих численных примеров.

Вероятно потому, что фирма не хотела, чтобы конкуренты узнали об обучении некоторых научных сотрудников статистической теории и её приложениям, командироваемым было разрешено публиковаться только под псевдонимом. Как Госсет был Стьюдентом, так Самерфильд стал Mathetes, а Стори – Sophister. Два других сотрудника фирмы, E. L. Kidd и Launce McMullen, посещали лекции по статистике в Университетском колледже, а A. L. Muggau работал у Фишера. В 1920-е годы очень немногие сотрудники, работавшие в промышленности, применяли методы математической статистики. Была эта большая группа в фирме Гиннес, был Типпет из исследовательских лабораторий Cotton Industry и Bernard Dudding из исследовательской лаборатории General Electric. Несомненно были и другие, существование которых я проглядел.

Письма Госсета ко мне неоднократно упоминают помощь, которую он получал от Самерфильда при предоставлении мне некоторых данных и при проверке численных вычислений. В случае со Стори, хоть о его командировке и общем руководстве его работой фирма договорилась с К. П., подробное планирование его исследований было поручено Госсету и мне. Вначале мы обсуждали, не должен ли он отбирать случайные выборки из симметричного распределения с положительным эксцессом, возможно представленного кривой Пирсона (или Стьюдента) типа VII<sup>8</sup>, но в конце концов остановились на асимметричном распределении типа III или гамма распределении при  $\beta_1 = 0, 50$  и  $\beta_2 = 3, 75$ .

Для введения выборочного процесса со случайными числами было необходимо подразделить совокупность на большое число равноотстоящих друг от друга плотностей, и коэффициенты бета

группированной совокупности, из которой фактически отбиралась выборка, не могли точно совпадать с коэффициентами непрерывного распределения типа III. Гистограмма совокупности у Стори характеризовалась значениями  $\beta_1 = 0,49$  и  $\beta_2 = 3,72$ .

Для тысячи выборок объёмом 5 и другой тысячи объёмом 20 Стори вывел эмпирические распределения средних  $\bar{x}$ , дисперсии  $s^2$  (и  $s$ ), размаха  $w$  и стьюдентова  $z = (\bar{x} - \mu)/s$ .

#### 6.4.2. Отредактированный вариант комментария Э.

**Пирсона.** В 1927 г. Э.Пирсона избрали в немногочисленный комитет Британской ассоциации по продвижению науки, и там он впервые встретился с Фишером, секретарём этого комитета. Был подготовлен [кем?] отчёт *Биологические измерения: рекомендации по их производству, представлению и ознакомлению с ними заинтересованных лиц и организаций*. При его подготовке возник вопрос о делении суммы квадратов [в формуле дисперсии – О. Ш.] на  $N$  или на  $N - 1$ . По этому поводу Пирсон запросил Госсета, и 13 мая 1927 г. (письмо III 1) Госсет предложил включить в текст отчёта (но не как подстрочное примечание) следующее утверждение.

*Стандартное отклонение определялось двояко<sup>9</sup>, как*

$$\sqrt{\frac{S(x - \bar{x})^2}{N - 1}} \text{ и } \sqrt{\frac{S(x - \bar{x})^2}{N}},$$

*и обе эти формулы можно было найти в различных учебниках. Первая из них определяет среднее значение, не зависящее от объёма выборки, а потому и от совокупности. С другой стороны, при больших выборках разность между формулами вполне пренебрежима, тогда как арифметический труд вычисления последующих статистик намного упрощается. В целом вероятно лучше применять знаменатель  $N - 1$  при малых выборках и  $N$  – при больших. Важно, однако, в каждом случае чётко указывать применяемую формулу.*

Именно Госсет в письме Фишеру 1 июня 1927 г. предложил ему включить Э. П. в состав комитета (Собрание документов, Guinness Collection, № 83):

*Я надеюсь, что Вы и Э. Ш. П. смогли отыскать формулу. Он написал мне очень доброжелательное письмо, в котором, как мне кажется, оценил Вашу точку зрения так же хорошо, как свою собственную, но я не знаю, что Вы подумали об (его варианте) моего предложения.*

В 1927 г. гармонические отношения между Фишером и Э. П. могли бы развиваться, но К. П. грубо нарушил их своей рецензией на книгу Фишера (1925с), см. § 6.5.

Активная переписка в группе III произошла потому, что в некоторых письмах обсуждалась программа исследований Стори. 28 июля 1927 г. (письмо III 2) Э. П. упомянул задачу, которую следовало поставить Стори по его прибытию в октябре. Он предложил исследование распределения  $z$  Стьюдента в выборках из асимметричной совокупности; в дальнейшем её более чётко заменили кривой Пирсона типа III. Госсет использовал работы

Стори, чтобы в нескольких письмах (9 ноября 1927 г., 4 января, 14 апреля и 21 мая 1928 г., III 7, 9, 13, 15) подчеркнуть, что  $z$  (или  $t$  Фишера) следует принять в качестве двустороннего критерия.

Это мнение соответствовало [существованию – О. Ш.] таблицы процентилей, которую впервые опубликовал Фишер (1925с, таблица 4 на с. 137). В письмах 4 января, а затем 14 апреля и 21 мая 1928 г. (III 9, 13 и 15) Госсет объяснил свою точку зрения вариантом абсолютного распределения:

*Совокупность неизвестна, и для меня асимметрия не может иметь никакого направления. Разумно считать, что в конечном счёте она может так же часто быть и той, и другой. Поэтому я должен рассматривать совокупность у Стори в соответствии с совокупностью с противоположной асимметрией. Для этого достаточно поменять знаки  $z$  и присоединить новое распределение частоты к прежней, и вот эту объединённую частоту я имею в виду сравнивать с функцией распределения Стьюдента.*

Э. П. (12 и 19 апреля 1928 г., письма III 12 и 14) вначале усомнился в том, что это объяснение в достаточной мере отвечает на многие проблемы, но позднее указал (6 октября, письмо III 19), что неверно понял суть предложения.

19 января 1928 г. (письмо III 10) Стори представил Госсету промежуточный отчёт, а в письме 4 июля того же года (III 16) описал, как проходят его исследования. Результаты он опубликовал тогда же (Sophister 1928), пояснив точку зрения Стьюдента:

*Если мы пользуемся таблицами Стьюдента, чтобы выяснить, была ли отобрана данная выборка из некоторой совокупности, лишь среднее которой нам известно, то эти результаты наводят на мысль, что в конечном счёте мы окажемся правы, если только асимметрия совокупности не превышает значения, принятого в нашей статье.*

К этому предложению К. П. добавил примечание:

*Допустим, что 50% судимых за убийство оправданы, остальные же признаны виновными, будут ли наши приговоры в конечном счёте верны, если мы откажемся от суда и станем основываться на результатах жребия?*

Е. S. Pearson (1939) частично воспроизвёл письмо Госсета 18 мая 1929 г. (III 24), назвав его письмом II<sup>10</sup>. Заключительный параграф [статьи] ссылается на это примечание К. П., Госсет же добавил заметку, предназначив её *Биометрике* и воспроизведённую вместе с письмом II, в качестве ответа на его ошибочную критику. Неизвестно, показывал ли Э. П. черновик этой заметки своему отцу или нет, но, как Госсет и ожидал, эту тему впоследствии обсудили Е. Pearson & Adjanthaya (1929, с. 262 и 274).

В то же время, когда Стори проводил свои исследования, Shewhart & Winters опубликовали статью (1928) об устойчивости стьюдентова  $z$  в выборках из прямоугольного и треугольного распределений. В письме 4 июля 1928 г. (III 17) Госсет обратил внимание Э. П. на их результаты и кратко комментировал их. Таково было первое упоминание о Уолтере А. Шухарте, который дружески повлиял на Э. П. и, после посещения США этим последним, был приглашён читать лекции в Лондоне.

Переписка, собранная в группе III, проходила параллельно с совместной работой Э. П. и Неймана и поэтому была естественно направлена на вопросы статистических выводов. В письме Э. П. 28 июля 1927 г. (III 2) рассматривались не только устойчивость стьюдентова  $z$ , но и распределения двух критериев,  $z'$  и  $z''$ , выведенных посредством отношения правдоподобия. Первый относился к сдвигам средней точки прямоугольного распределения, второй – к сдвигам начальной точки экспоненциальной совокупности, причём в обоих случаях параметры изменчивости совокупности считались неизвестными.

Воодушевившись существенным письмом 11 мая 1926 г. (I 4), Э. П. имел в виду честолюбивую программу исследования выборок из асимметричных распределений, но его следующее письмо 1 августа 1927 г. (III 3) показывает, что пивовары, как сообщил Госсет, в своих обычных анализах были заинтересованы только в симметричных распределениях с длинными хвостами. В результате Aduanthetaya пришлось заняться выборками из кривых типа VII (т. е. симметричных кривых типа IV), и Э. П. в письме 1 ноября 1927 г. (III 4) спросил, как велико должно быть  $\beta_2$ . 6 ноября (письмо III 5) Госсет ответил, сообщив сведения от Самерфильда и сформулировав предложения о методе соответствующих выборочных исследований.

12 апреля 1928 г. (письмо III 12) Э. П. обсуждал распределение  $z'$  и описал результаты Aduanthetaya о выборках из симметричных распределений, не являющихся прямоугольными. После публикации статьи Neyman & Pearson (1928) последний (письмо 6 октября, III 19) указал, что идею альтернативной гипотезы предложил Госсет и воспользовался случаем, чтобы полнее описать подход Неймана и Пирсона, разработанный к тому времени.

Вывод выборочного распределения  $z'$  привел Э. П. к сравнению чувствительности альтернативных критериев статистической гипотезы при помощи функций мощности, как их назвали позднее Нейман и он сам. Этой проблемой он занимался при содействии Aduanthetaya, применяя экспериментальные выборки; результаты они опубликовали в совместной статье (1928). В ней были табулированы первые, в основном эмпирические, функции мощности для  $z'$  и  $z''$  (таблицы V и VII).

Подобные экспериментальные и наглядные подходы были для Пирсона естественными, и по сути только с их помощью он замечал, какие математические проблемы следовало решать. Математик-Нейман полагал, что реальный успех должен достигаться иначе, и в статьях, описывавших свои предшествовавшие работы и затруднения в математических исследованиях, он, видимо, упустил из вида, что их совместная работа в 1927 – 1930 гг. привела к идеям, основополагающим для их собственного успеха. Например,

1. Понятие о принципе отношения правдоподобия привело к выводу надёжных (good) критериев в случаях, при которых не существовало равномерно наиболее мощных критериев, т. е. к ответу на вопросы, к которым нельзя было применять результаты Neyman & Pearson (1933b).

2. Существенное исследование теории *нормальности* и других критериев.

3. Экспериментирование, которое возможно само по себе позволило уяснить понятие мощности.

В этом смысле исследования Неймана и Пирсона дополняли друг друга.

Письмо Пирсона 7 ноября 1927 г. (Ш 6) грубым и наглядным способом ввело метод, которым можно было исследовать проблему интервальных оценок. Он в неясной и неопределённой форме предложил какой-то вид обращённого распределения для коэффициента формы,  $\beta_2$ , основанного на выборочном значении  $b_2$ . Этот метод схож со стандартной процедурой отыскания *доверительного распределения*, но приложен он был к проблеме, которая остаётся нерешённой. Э. П. изготовил картонную модель, представляющую зрительное понятие, и применял её в своих лекциях в Университетском колледже и в университете Айовы в 1931 г.

Охват письма Госсета 18 мая 1929 г. (Ш 24) был быть может самым обширным из всех его посланий Пирсону. Это письмо знаменует окончание группы Ш, ибо оно закруглило обсуждения работы Стори и исследований Э. П. при помощи экспериментальных выборок. Госсет предстаёт как практик, который объединил вероятностные методы, выведенные из применения теоретически верных способов проверки статистических гипотез или оценивания, с другими соображениями, с неясным априорным познанием, экономическими ограничениями и приближённостью математических моделей.

**6.5. Обзор книги Фишера (§ 5.3).** Здесь обсуждаются письма группы IV, написанные между 8 июня и 30 сентября 1929 г.

**6.5.1. Редакторское введение.** Через 25 лет после выхода книги Yates (1951) описал, как она была воспринята:

*Как только и следовало ожидать по поводу книги, которая ознаменовала такой громадный отрыв от традиций, её полная значимость не была понята сразу же. Тем не менее, рецензенты [...] заметили, что книга была важной, а свои критические высказывания в основном ограничились недостаточно почтительным отношением к авторитетам и проблемами вразумительности и изложения.*

Одну из рецензий опубликовал Э. Пирсон (1926b), а после выхода в свет второго издания книги в *Nature* вышла в свет его новая рецензия. За ней на протяжении более четырёх месяцев 1929 г. последовало 28 писем. Рецензия Э. П. (8 июня) признала необходимость в методах малых выборок и указала на существенное развитие этого направления статистической теории автором. Он, однако, критиковал книгу за недостаточно подчёркнутое предположение нормальности, на котором были основаны многие методы. Он также поставил под сомнение [недостаточное – О. Ш.] ударение на *точность* критериев, когда при исследовании совокупностей, отклоняющихся от нормальности, они становились более или менее неточными.

*Что критерии, связанные, например, с дисперсионным анализом, намного более зависят от нормальности, чем те, в которых применяется распределение  $z$  (или  $t$ ) Стьюдента, почти достоверно, но необходимость в осторожности при их применении ясно не указана. В конечном счёте, представляется более разумным, даже в учебнике, признать неполноту этого направления теории, нежели рисковать созданием впечатления у читателей, что все проблемы уже решены.*

Фишер пожаловался редактору *Nature*, и 17 июня его письмо было переправлено Э. П. для комментирования. Это письмо не сохранилось, но Фишер, видимо, посчитал рецензию обидной и особенно возражал против замечаний о *точности*. 18 июня Э. П. подготовил ответ и сослался на Tolley (1929), который предупреждал, что обычные анализы данных экономики ограничены тем, что большинство распределений частот этих данных не является нормальным, но что появились новые методы.

*Недавно, однако, английская школа статистиков разработала формулы и составила сопроводительные таблицы вероятностей, утверждая, что их формулы, которые привёл Фишер (1925с), применимы вне зависимости от формы распределений.*

В то время Госсет посетил Университетский колледж, и Э. П. показал ему письмо Фишера. Госсет вызвался написать ему, и многое из последовавшей дискуссии состояло из обмена писем между ним и Фишером. Э. П. оставался в стороне, но Госсет сообщал ему обо всём происходящем.

19 июня, начиная переписку, Госсет выразил своё глубокое разочарование тем, что письмо Фишера в *Nature* было довольно резким и обратил внимание на статью Tolley. Он подчеркнул, что Пирсона то и дело спрашивают, в какой мере можно применять методы Фишера при выборках из не-нормальных совокупностей, и что Пирсон действительно высоко оценивает Фишера и искренне пытается работать совместно с ним несмотря на своё щекотливое положение по отношению к отцу.

20 июня Фишер ответил, пояснив, что был раздражён не тем, что рецензент усомнился в точности применения его методов к данным, не распределённым нормально, а намёком на то, что он, Фишер, претендует на точность. Далее Фишер спросил, основано ли как-то утверждение Tolley на работах Госсета. Несколько пространно выражая своё раздражение, он закончил более спокойно:

*Я не думаю, что согласованное заявление [в *Nature* – О. Ш.] вовсе невозможно, но не стану писать Э. Ш. Пирсону до тех пор, пока снова не услышу от Вас, потому что хочу быть уверен, что Вы в какой-то степени понимаете, что именно я желаю высказать.*

24 июня, в своём втором письме, Госсет сослался на новое лицо, на своего помощника Эдуарда Самерфильда, который был учеником Фишера в Ротамстеде и вычитал корректуру его книги. Госсет попросил его высказаться, и тот сказал, что рецензия хороша и что он был поражён тем, в какой степени он [Фишер – О. Ш.] пренебрёг проблемой нормальности.

Госсет передал это мнение; отклонил обвинение, выдвинутое Фишером в том, что Э. П. намекнул на недобросовестность (dishonesty); заметил, что Фишер упустил *одно слово* про то, как *точность* зависит от нормальности; уведомил Фишера, что ему следовало бы решить практическую задачу о степени влияния ненормальности; пояснил, что он, Госсет, не виновен в заблуждении Tolley; и закончил, предложив, как можно было бы видоизменить письмо Фишера в *Nature*, чтобы оно стало выражать точку зрения автора (Фишера) с учётом его, Госсета, позиции.

И начало, и окончание ответа Фишера 27 июня были миролюбивыми:

*Почему бы Вам [самому – О. Ш.] не написать в Nature и не позволить мне [тем самым – О. Ш.] отозвать своё письмо? Представляю себе, что Вы можете сказать что-то, что с моей точки зрения окажется лучше, чем ничего, и безвредным для остальных. [...] Во всяком случае, подумайте, что именно Вы смогли бы сделать, если захотите. Неприятные ощущения вряд ли нравятся мне больше, чем Вам.*

Но многое в письме было далеко не мирным, а ссылка на Самерфильда явно оказалась нежелательной:

*Причём здесь Самерфильд? Как я понимаю, существует  $\alpha$ -Самерфильд, которому наплевать на нормальность, и  $\beta$ -Самерфильд, который поражён своим невежеством и безразличием. И он сам, и Вы полагаете, что последний умнее. При отсутствии свидетельств я не нахожу оснований для их сравнения, но Вы не удовлетворились тем, что осудили  $\alpha$ , посчитав его злодеем. [Из Ваших слов – О. Ш.] видимо следует, что я виновен в его злодеяниях, хоть это не было бы возможным, будь я его нянькой при прорезывании его зубов.*

Фишер повторил своё обвинение в том, что рецензия указывала, что он выставил ложное притязание. При выборе хороших примеров нормальность, по его мнению, представляла наименьшую трудность, а замена случайной величины достаточна для выполнения всех пожеланий.

*Я довольно часто применял критерий  $z$  к грубым значениям и к значениям логарифмов, даже когда переход [от чисел к логарифмам? О. Ш.] требовал тщательного внимания, как и в ранней статье Fisher & MacKenzie (1923), но это никогда не приводило ни к каким существенным различиям.*

28 июня Госсет согласился написать в *Nature*. По поводу замечаний Фишера о нормальности он указал ему:

*[...] Я думаю, что пока что Вы должны удовлетвориться, если Вас разделят на  $\alpha$ -Фишера, крупного математика, и  $\beta$ -Фишера, скромного потребителя его формул. Дело  $\alpha$ -Фишера, – и я полагаю, что это действительно его дело, – удовлетворять потребность мира в статистических формулах, но истинный  $\beta$ -Фишер не думает, что те, которые мне хотелось бы иметь, необходимы.*

*Впрочем, между нами говоря, это просто его упрямство. Во всяком случае, я вполне согласен, что то, как мы обращаемся с не нормальными распределениями, не касается никого из них, это*



только основано на опыте. Но  $\alpha$ -Фишер заинтересован в теоретической части дела, а  $\beta$ -Фишер – во всём хорошем, которое он здесь усматривает для себя. Но когда  $\beta$ -Фишер говорит, что подробное исследование данных это его дело и приступает к нему при помощи таблиц, которые строго верны лишь для нормально распределённых случайных величин, – тогда, как полагаю, я вправе спросить, как изменится результат, если на самом деле выборка не была отобрана из этого класса величин. И более того, он настолько терпим, что указывает примеры, в которых резкое преобразование приводит лишь к незначительной отличию. Вот во что я верю, но не чувствую себя вправе предполагать.

28 июня Госсет написал письмо в *Nature* от Стьюдента. Оно содержало что-то для каждого. Утверждение Tolley описывалось как возможное впечатление небрежного читателя; рецензия Э. П. была смягчена заменой слова *признать* в приведенной выше выдержке на *подчеркнуть*. Убеждение Фишера в том, что нормальность не имеет большого значения, было в некоторой степени поддержано, и Госсет выразил надежду на то, что Фишер *укажет нам*, какие изменения в таблицах необходимы при ненормальности.

И тогда же Э. П. написал дружелюбное письмо Фишеру, обвиняя себя в том, что не оценил, как его рецензия будет воспринята автором. Редактор *Nature* был несколько озадачен вмешательством постороннего, но 4 июля он решил опубликовать письмо Стьюдента в колонке писем, потому что и Фишер, и Э. П. согласились с этим, а само письмо *вряд ли привело бы к дискуссии о рецензии*. Последнее соображение редактор прояснил, изменив *укажет нам* на *покажет нам в другой публикации*.

20 июля письмо было опубликовано, но проявление редакторской власти лишь вызвало раздражение у Фишера. 26 июля он заявил Госсету, что *не желает знать его выражения в другой публикации, если это Ваши слова*.

Новым источником разлада послужил добавленный адрес Стьюдента, *Гальтоновская лаборатория, Университетский колледж*. 24 июля Э. П. сообщил Госсету, что *несколько удивился*, но никаких шагов не предпринял. Это было ошибкой, потому что 3 августа *Nature* опубликовало письмо К. П., который возразил, находясь в отпуске:

*Я уверен, что он [Стьюдент] осознает при более тщательном размышлении, что обязанности директора лаборатории станут невыполнимыми, если каждый сможет указывать её адрес, не получив разрешения директора.*

В конце июля Э. П. отправился в Польшу и после двухмесячного отсутствия обнаружил, что 17 августа *Nature* опубликовало ответ Фишера. Фишер не согласился с тем, что видоизменение его таблицы дисперсионного анализа для их приспособления к ненормальности было бы закономерным обобщением его методов. Даже если *полк вычислителей в 200 раз расширит существующие таблицы*, чтобы вывести критерии для системы кривых Пирсона, всё ещё останутся распределения вне этой системы и возникнут

проблемы погрешности выборок при оценке параметров и более подходящими окажутся другие статистики. И он заверил читателей *Nature*, что биологам не следовало беспокоиться.

*Я никогда не замечал, что возникают трудности в биологической работе от несовершенной нормальности изменчивости, хоть и часто исследовал данные с этой точки зрения. И я не думаю, что в литературе был указан случай противоположного.*

Э. П. написал возражение, и 25 сентября Госсет рекомендовал ему отправить его в *Nature*:

*Говоря о своём опыте, Фишер только воображает его. Его опыт не так уж серьёзен, и я держу пари, что он не часто проверял это дело, – как он смог бы это сделать?*

В своём ответе Э. П. 26 сентября признал влияние их прежних обсуждений.

*В конце концов это заявление было в основном выстроено на Ваших комментариях, которые Вы мне присылали время от времени.*

Он также привёл некоторые результаты проверки равенства  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  для независимых выборок из распределения с положительным эксцессом: согласие с процедурой, основанной на теории нормальности, было *просто отвратительным*. Его письмо в *Nature*, написанное 30 сентября, было опубликовано 19 октября и оказалось последним звеном этой длинной цепочки. Он заявил, что проблема отличия от нормальности была реальной, и что, хоть совокупность лишь изредка будет известна, изучение практических примеров может обеспечить полезную информацию о достаточной полезности стандартных критериев.

**6.5.2. Комментарии Э. Пирсона.** Свет, брошенный письмами на взгляды их трёх авторов, поясняют, что именно Фишер и Госсет 27 и 28 июня называли характеристиками  $\alpha$  и  $\beta$  у математических статистиков. Первая,  $\alpha$ , относилась к теоретическому подходу, который часто развивался, и всё ещё развивается либо в предположении нормального распределения случайных величин, либо с использованием асимптотических результатов.

Вторая характеристика,  $\beta$ , описывает поведение статистика при анализе и истолковании действительных данных наблюдения.  $\alpha$ -Фишер вывел прекрасно задуманные и математически обоснованные методы. Он понимал различие между своими  $\alpha$  и  $\beta$  составляющими, однако различные исследования убедили его, что отклонения от нормальности не обесценивают истолкования данных, с которыми имели дело он сам и большинство вероятных читателей его книги (1925с).

В статье Fisher & Mackenzie (1923), на которую он сослался в письме 27 июня, исследовались таблицы дисперсионного анализа в предположении, что при различных удобрениях урожай картофеля данной разновидности является суммой или произведением двух факторов. Результаты анализа оказались в обоих случаях почти теми же самыми, но для читателя подобное исследование само по себе вряд ли оказывалось достаточным изучением общей проблемы, и, насколько мне известно, во всех подробностях подобные исследования нигде не обсуждались.

Госсет, с другой стороны, быть может сталкивался с более широким разнообразием одномерных распределений данных и стремился к более тщательному исследованию того, что сейчас мы называем *устойчивостью* методов *теории нормальности* Фишера. При своём собственном обучении в традиции К. П. я осознал действительное существование не-нормальных распределений, нередко вполне хорошо представляемых одной из его системы кривых плотности<sup>11</sup>. И поэтому, когда в письме ко мне 11 мая 1926 г. Госсет поднял вопрос об *устойчивости*, я охотно ухватился за мысль о систематическом исследовании этой проблемы, применяя то, что можно назвать экспериментальными выборками.

Подобная работа, даже с помощью таблиц Типпета (1927), неизбежно была медленной и обрывочной, и при составлении своей рецензии для *Nature* она всё ещё продолжалась. Первым отчётом о ней послужила заметка E. S. Pearson & Adyanthaya (1928), за ней последовали сведения о подробностях и, наконец, я (1931a) указал в числах, что некоторые критерии, применявшие отношение двух оценок дисперсии (т. е. то, что Фишер назвал статистикой  $z$ ), были намного более чувствительны к не-нормальности, чем остальные.

К июню 1929 г. я уже собрал достаточно свидетельств, чтобы убедиться, что моё предупреждение о предположении нормальности, указанное в рецензии в *Nature*, было обосновано. Я был несомненно раздражён утверждениями о том, что критерии Фишера *точны* и намекающими на то, что издавна принятые процедуры ошибочны и должны быть отброшены. Но было бы неблагоприятно включать в рецензию довольно смутную ссылку на *дисперсионный анализ и распределения  $z$  ( $u$  и  $t$ )*. Моё утверждение было выведено по экспериментальным выборкам, но не опубликовано вплоть до 1931 г.

Если

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

и если изменчивость не-нормальна, следует учитывать два обстоятельства:

1. Если оценки существенно независимы, например, выведены из отдельных выборок, то критерий отношения дисперсий не является устойчивым.

2. В проблемах дисперсионного анализа, например, если  $s_1^2$  – межгрупповая, а  $s_2^2$  – внутригрупповая оценки дисперсии ошибок  $\sigma^2$ , то в случае не-нормальности существует корреляция между  $s_1^2$  и  $s_2^2$ , стремящаяся сохранить устойчивость критерия отношения дисперсий.

В 1929 г. я, возможно, исследовал результаты своих экспериментальных выборок только в отношении первого обстоятельства.

В соответствии со своим нравом Фишер обиделся на намёк о том, что он скрыл значимость *нормальности*, но затем продолжительный спор показал, что Госсет сочувствовал моей точке зрения о том, что в книге Фишера (1925с) на это обстоятельство следовало обратить больше внимания. Кроме того, как тоже стало ясно, Госсет очень стремился предотвратить ссоры между Фишером, мной и К. П., — между теми, которые по-разному были его хорошими друзьями.

Наибольшая часть моей теоретической работы, разумеется, прошла совместно с Нейманом. Я был  $\alpha$ -лицом, готовым восхищаться многим в  $\alpha$ -Фишере, но контакты с Шухартом и Британским институтом стандартов показали мне  $\beta$ -компоненту моего подхода. Оказалось, что я лишь в нескольких ссылках [в письмах?] обсуждал с Госсетом  $\alpha$ -подход у себя или у Неймана, потому что он не был достаточно хорошим математиком и не смог бы оценить его.

Более полное и систематическое исследование проблемы устойчивости критериев нормальной теории стало возможно лишь через много лет при внедрении компьютеров, см., например, E. Pearson & Please (1975).

**6.6. Влияние не-нормальности.** Здесь обсуждаются письма группы V, написанные между 19 июля 1929 и 14 апреля 1931 г.

**6.6.1. Редакторское введение.** 19 июля 1929 г. (письмо V 1), желая получить комментарии Госсета и Самерфильда, Э. П. описал схему отбора выборки, содержащей  $k$  распределений частот кривых типа VII с положительным эксцессом, из своих одномерных выборок. В точности через год он начал формулировать свои выводы, и кратко описал их 6 сентября 1930 г. (письмо V 6):

*Некоторые интересные вещи всё же появляются. Полагаю, что в простейшем случае дисперсионного анализа, при проверке существования единого фактора и случайной изменчивости (другими словами, при использовании  $\eta^2$  [квадрата корреляционного отношения]) критерий теории нормальности замечательно хорошо подходит при очень широкой изменчивости в совокупностях. Это сводится к тому, что применяемые критерии являются отношением двух оценок, и когда изменчивость перестаёт быть нормальной, происходит положительная корреляция между числителем и знаменателем, и распределение отношения поэтому не изменяется.*

То же обстоятельство было указано в статье E. Pearson (1931a, с. 129 – 131). И его же он имел в виду в своей рецензии 1929 г. в *Nature* на книгу Фишера (1925), но не пояснил его. В 1908 г. Госсет и сам указал на корреляцию между числителем и знаменателем. Быть может он забыл об этом, но для него было бы характерно не напоминать Э.П. об этом.

Исследования корреляции были намечены в письме 19 июля 1929 г., а 1 ноября 1930 г. (письмо V 7) Э. П. сослался на свои результаты о распределении выборочного коэффициента корреляции при нулевом коэффициенте совокупности и случайных величинах, распределённых по одной и той же кривой с

положительным эксцессом. Подробности он опубликовал в статье (1931 – 1932), а вскоре последовала совместная статья Cheshire, Oldis & E. Pearson (1932).

В конце этого периода Э. П. обратился к устойчивости метода дисперсионного анализа при его применении к латинским квадратам. 27 марта 1931 г. (письмо V 11) он попросил совет [у Госсета] по поводу предложенного выборочного эксперимента и 1 апреля (письмо V 12) Госсет кратко ответил:

*Полагаю, что практически задачи о латинских квадратах отличаются от теоретических условий в двух направлениях. Эксцесс совокупности имеет тенденцию быть положительным; дисперсии на самом деле не совпадают. Вообще же объём выборок слишком мал для таких выводов, но я в достаточной мере уверен во всех этих фактах.*

*Вы собираетесь иметь дело с первым обстоятельством, но я считаю, что второе настолько же важно. Думается, что некоторые ученики Фишера начинают исследовать этот вопрос с точки зрения второго обстоятельства. Лично я ожидаю, что аппроксимация не обязательно должна быть слишком близкой, чтобы исследуемый метод достаточно хорошо работал, и такова точка зрения Фишера, но хотел бы видеть, что это проверено.*

10 апреля (письмо V 14) Пирсон описал свою предложенную схему выборок более подробно, и 14 апреля (письмо V 15) Госсет разъяснил, что его проблема была не совсем той же.

*Но моя проблема такова. Считая, что при нормальном распределении случайных величин  $z$ -критерий Фишера позволит нам оценивать значимость любой разности дисперсий, возможной между случайной ошибкой и разновидностями, выяснить, будет ли это соблюдаться при не-нормальных случайных величинах. Или же, считая, что при нормальных случайных величинах таблицы Стьюдента можно применять для суждения о значимости любой разности между случайными величинами, выяснить, будет ли это соблюдаться при не-нормальных случайных величинах.*

*Чтобы проверить это, мне следует отобрать одну совокупность, весьма отличную от нормальности со значительными  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ; отобрать, далее, довольно большое число выборок объёмом 25, расположить их в латинские квадраты и по жребию определить местоположение букв in the appeared fashion и приглядеться к распределению четырёх дисперсий (общая, по строкам и колонкам, вариантам опыта), а также и к распределению  $z'$ -Стьюдента и разделить средние по строкам и колонкам, вариантам опыта\*, на их собственные случайные стандартные отклонения. Если средние окажутся хорошими, разности между ними будут ещё более подходящими.*

*\*Реального отличия между строками, колонками и вариантам опыта не существует, и можно с тем же успехом применить все три.*

Другой темой обсуждения было распределение размаха. 26 ноября 1930 г. (письмо V 5) Э. П. описал трудности, возникшие

при подгонке кривых к верным теоретическим моментам, чтобы образовать таблицу процентилей, и 28 ноября (письмо V 9) Госсет выслал ему книжечку вычислений, выполненных Самерфильдом при подготовке грубой таблицы для статьи Госсета (1927). Свои собственные вычисления Э. Пирсон опубликовал позже (1932).

К письму 19 июля 1929 г. Э. П. приложил оттиск длинного отчёта Шухарта Bell Telephone Report и указал, что тот предложил 4 критерия для суждения о [наличии или] отсутствии статистического контроля промышленного производства, а потому явно не знал или не понял методов анализа Фишера. Эти критерии Шухарт воспроизвёл в своей книге (1931). Он попросил Э. П. прокомментировать её, и они обсуждали эти вопросы в 1931 г. в Нью-Йорке при посещении США Пирсоном.

**6.6.2. Комментарии Э. Пирсона.** К лету 1929 г. я решил, что настало время расширить свои исследования устойчивости за пределы критериев одномерной случайной величины. В то время очень немногие читатели *Биометрики* последовали за Фишером в его второй ступени. Если они были математически подготовлены и желали понять, как были разработаны статистические процедуры второй ступени, им всё же потребовалось бы много времени, чтобы самим вывести для себя теорию, на которой была основана книга Фишера (1925с). Как я уже упомянул, математический доклад Фишера на Математическом конгрессе в Торонто, был опубликован лишь в 1926 [в 1928] г. [1928а], но он не мог знать, кому высылать оттиски, и было бы трудно ожидать широкого понимания [его новшеств].

В 1929 и 1931 гг., составляя свои статьи, опубликованные в *Биометрике*, я несомненно полагал необходимым начать с вывода распределения того, что фактически было фишеровым отношением [логарифма] двух независимых оценок одной и той же дисперсии

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

А так как применявшие [подход] первой ступени всё ещё пользовались критерием квадрата корреляционного отношения  $\eta^2$  для проверки линейности регрессии, я выразил критерий Фишера в функции этой статистики, знакомой тем, чьей теоретической основой была первая ступень К. Пирсона.

Прочитав спустя долгое время письма 1, 9, 10 и 14 апреля 1931 г. (V 12 – 15), мне стало ясно, что я ещё не уловил практику рандомизации у Фишера, основу которой очень подробно описала Вох (1978). В 1931 г. я желал исследовать устойчивость модели, в которой случайная нормальная погрешность добавлялась к средним по строкам и по колонкам в латинских квадратах. Бокс (с. 147) указала, что при случайном выборе, скажем, разновидностей для участков Фишер представлял себе, что при начальной гипотезе *никакого различия ввиду обработки участков* распределения критериев<sup>12</sup>

$$F = S_B^2/S_W^2 \text{ или } z = 1/2 \ln F$$

не будут в точности следовать распределениям нормальной теории. Она заметила, что *этот вывод было трудно обосновать теоретически, и многие годы он беспокоил статистиков*. Лишь Eden & Yates (1933) доказали, исследуя [гипотезу] равномерности в большом масштабе, что практически эта предпосылка [что гипотеза] примерно выполняется.

Welch (1937), который сотрудничал с моим факультетом [прикладной] статистики, вновь исследовал распределения при рандомизации, полученные при опытах с допущением равномерности. Сводку статьи и свои выводы он разместил на с. 47 – 48. Уместно заметить, что Фишер и я сам были экзаменаторами Уэлча на его защите степени доктора философии. Помню, что во время устного экзамена он смог отстаивать свою точку зрения и полагаю, что Фишер счёл его исследование полезным, притом в практическом смысле поддерживавшим рандомизацию. Но, насколько мне известно, он так и не указал этого в печати. Моё собственное мнение о рандомизации, которое повторяло мысль Welch, я описал в статье, опубликованной вслед за его статьёй (1937), с. 53 – 64.

Лишь в 1930-е годы я начал представлять себе значение и цели рандомизации. Стюдент действительно предостерегал меня против моего предположенного эксперимента, выборочного исследования. Это, видимо, последовало после его замечания в письме 14 апреля (V 15), в котором он указал, что в таком эксперименте *места следует назначать по жребью*, чтобы решить каким участкам с латинскими квадратами (Latin square plots) следует придать мои буквы А, В, С, D и Е. Через несколько дней после этого я уехал в США, и потому не продолжил своих исследований и не вернулся к ним после своего возвращения в сентябре.

Длительный четырёхлетний период исследования устойчивости практически закончился с этой поездкой в Нью-Йорк. При возвращении через 5 месяцев я в основном занялся теоретической работой с Нейманом и внедрением статистических методов в промышленность.

**6.7. Расхождения о критерии  $z$  и о планировании экспериментов.** Здесь обсуждаются письма группы VI, написанные в период между 29 января 1932 и 15 октября 1937 г.

**6.7.1. Редакционное введение.** Госсет начал своё письмо 29 января 1932 г. (VI 1) предложением составить таблицы *студентизированного* размаха, и это место письма было воспроизведено (E. Pearson 1939, Letter III). Подобные таблицы были опубликованы позднее (E. Pearson & Hartley 1943).

Многие другие письма были написаны потому, что Госсета атаковали вначале его прежний учитель, а затем его бывший ученик<sup>13</sup>. К. Пирсон (1931a) пытался проверить гипотезу о равенстве средних [выборки] из совокупности, однако, поскольку вопрос был усложнён наличием корреляции, он предостерегал против применения  $z$  Стьюдента.

*Например, если мы исследовали сравнительную действенность двух лекарств или методов промышленного производства на тех же самых группах лиц<sup>14</sup> и выявили существенное различие, мы ещё не доказали, что оно сохранится при исследовании других групп лиц.*

14 июля 1931 г. Госсет написал [письмо Э. Пирсону ?] и приложил записку о применении  $z$  при проверке значимости средней разности между коррелированными переменными.

*Надеюсь, что Вы сможете как-то упомянуть, что я всегда считал весьма важным устранивать всё так, чтобы корреляция оказывалась возможно более высокой. В случае сельскохозяйственных экспериментов моя основная критика Фишера состояла в том, что он не сделал всего возможного в этом направлении.*

Последующие письма Госсета 23 июля и 18 августа свидетельствуют о том, что К. Пирсону было трудно понять его комментарии, хоть они и были опубликованы (1931b). Вслед за этой его двухстраничной заметкой К. П. (1931b) поместил своё возражение на семи страницах, указывая, что *Стьюден*, как мне кажется, неверно истолковал результат своего собственного исследования.

Положение становилось невозможным, и Госсет подробно [описал его] Э. Пирсону в 29 января 1932 г.

*По поводу критической атаки К. П. на  $z$ , я чувствую, что его стиль несколько ограничен желанием не выставить меня в слишком нелепом виде, и ведь мой собственный стиль в некоторой степени именно таков. В какой-то мере это прискорбно, потому что его мнение, конечно же, обладает громадным весом, а ведь в этом случае он определённо ошибается.*

*Есть ли смысл в дальнейшей дискуссии? Если я продолжу, он не убедится и, возможно, лишь убедит других, и я определённо воздержусь от этого. Могу ли я написать ответ Вам, чтобы затем послать его и ему, пусть в изменённом виде, если Вы сочтёте это разумным? Я хотел бы указать [...].*

Ответ был очень благожелательным, с советом послать личное письмо [К. Пирсону]. Письмо 29 марта 1932 г. начинается с его реакции на замечания личного характера, опубликованные в *Биометрике*.

*Было бы неразумно ожидать, чтобы Вы относились к *Стьюден* так же, как я, но мне думается, что Вы не вполне представляете себе, как именно применяют его на практике.*

Он приложил пять страниц анализа вопросов, возникающих при обработке коррелированных данных для Вас лично, а не для публикации, и на этом данный эпизод закончился.

С 1926 г. Фишер выступал за рандомизацию в полевых экспериментах, однако Госсет неизменно предпочитал систематические схемы. Последнее сохранившееся письмо из его переписки с К. П. 19 февраля 1935 г. показывает, что, выздоравливая после несчастного случая на дороге летом 1934 г., он составлял статью для *Биометрики* о планировании экспериментов.

*Мне жаль сообщить, что работа о методе *half-drill strip* (HDS) готова лишь наполовину, потому что лишь в начале октября моя*



*нога достаточно окрепла и позволила мне, хотя и в металлическом протезе, вернуться к работе.*

26 марта 1936 г. прошла конференция, организованная промышленным и сельскохозяйственным исследовательским центром Королевского статистического общества для обсуждения *Сотрудничества при экспериментах в большом масштабе*. Госсет открыл её и убеждал в достоинствах метода HDS, однако следующим выступал Фишер, выразивший противоположные взгляды. На конференции присутствовал Бивен, чтобы поддерживать своего старого друга [Госсета] и критика Фишера системы HDS на него не подействовала.

*Он не был уверен, проклял ли Фишер [этот метод] со слабой похвалой или с безусловным осуждением, но в любом случае его враждебность будет нейтрализована.*

Вскоре после конференции появилась статья Fisher & Barbacki (1936), затем состоялся обмен письмами с Госсетом в *Nature*. Тем временем Госсет продолжал составлять свою последнюю статью (1938) и почти закончил её до своей смерти. До публикации Э. Пирсону и Нейману пришлось лишь слегка отредактировать рукопись.

30 марта 1937 г. (письмо VI 8) он [Госсет] послал приложение [к чему и кому?], объяснив, что довольно трудно достаточно хорошо и, в особенности, просто описать [совместную?] работу Фишера.

*Он воспользовался [они воспользовались?] тем, что Бивен предложил определять погрешности участков по ошибкам их блоков, будто они были независимыми, хотя на самом деле они, разумеется, коррелированы. Фишер хотел опорочить сбалансированные планы, однако 1) я сразу же указал на ошибку, и 2) это предложение можно в той же мере ошибочно применить для определения погрешности самых рандомизированных планов. И вот от чего зависят три из четырёх выводов. Каждый мог бы предвидеть результат, хоть, признаться, не его конкретное выражение, которое зависит от ошибочного метода достижения равномерности эксперимента, применённой при уходе за участком.*

*Некоторые борозды (drills) систематически обеспечивали более высокий урожай, чем другие. Каждая восьмая\* давала наивысший урожай в 12 случаях из 15, и второй наивысший в трёх остальных случаях. После шести [борозд] он пропускал одну и поэтому его HDS по всей своей длине становились либо высоко, либо низкоурожайными в зависимости от того, содержалось ли в них больше или меньше высокоурожайных борозд, и корреляция между их частями оказывалась намного выше, чем было бы в обычном случае. Но довольно об этом.*

*\*Его рядовая сеялка несомненно имела восемь сошников, отстоящих друг от друга на неравные расстояния, так что одна из борозд занимала больше места.*

Другое письмо на ту же тему 19 апреля 1937 г. (VI 10) также было воспроизведено (E. Pearson 1939, Letter VI).

К. П. умер 29 апреля 1936 г. Подготавливая его биографический очерк, Э. П. спросил Госсета, не осталось ли у него записей лекций К. П. за 1906/1907 г. К ответному письму Госсета 11 мая 1936 г. (VI 5) не было приложено никаких подобных записей, но он добавил различные воспоминания, которые продолжали указанные в § 3.2.

*Я также научился у него закусывать кексом с тмином. Он неизменно приходил точно тогда, когда его ждали, с чашкой чая и либо с ломтём этого кекса, либо с намавленным сухим печеньем и считал, что мы обязаны продолжать работу примерно до половины седьмого [...].*

*Во время войны мне как-то поручили заниматься таблицами бомбометания, к сожалению, неточными ввиду ошибочной интерполяции, так что их пришлось переделывать [...].*

В письме 13 октября 1937 г. (VI 13) Госсет упомянул тромбоз, а через три дня он умер.

**6.8. Окончательные комментарии Э.Пирсона.** За пять лет с апреля 1926 по апрель 1931 г. моя переписка с Госсетом составила 83 письма. Напротив, за шесть лет с января 1932 до октября 1937 г. сохранилось лишь 15 писем, все от Госсета. Восемь из них было написано в последний год его жизни, в течение которого он составлял свою посмертно опубликованную статью (1938).

Изменение темпа нашей переписки объяснить нетрудно<sup>15</sup>. Я воспользуюсь случаем и кратко сообщу о своём долге Госсету и об изменении наших отношений в течение пяти лет до моей поездки в США в 1931 г.

В течение двух месяцев, соответствующих шести письмам группы I, он критиковал и просвещал меня, что позволило мне приняться за философию статистики и уничтожить разрыв между первой и второй ступенями современной математической статистики. Я подошёл к идеям и проблемам, которые оправдывали моё желание сотрудничества с Нейманом.

В девяти письмах группы II, несколько перекрывающую письма группы I, мы обсуждали применение выборочного размаха, и каждый из нас достиг некоторого успеха. Это обсуждение привело к его предложению применять размах в качестве практической статистики, что он и иллюстрировал своей статьёй (1927).

В 25-и письмах группы III (май 1927 – мая 1929 г.) я обсуждал с ним, как выполнять его предложение по исследованию устойчивости теории одномерных нормальных критериев (univariate normal theory tests). В этом же периоде наше обсуждение исследований Стори привело меня ко многим ценным идеям. Они существенно расширили моё знание того, как в дублинской пивоварне статистически анализируют малые выборки и как можно их исследовать в других отраслях промышленности.

Это значительно помогло мне в последующие годы, когда я находился в контакте с Шухартом из Bell Laboratories, с промышленностью в Англии, с Британским институтом стандартов и при учреждении секции промышленных и сельско-

хозяйственных исследований Королевского статистического общества. Нейман приобрёл большой практический опыт при обработке данных в Варшаве в должности консультанта, мои же притязания на большее, чем на теоретическую статистику, были в основном оправданы руководством Стьюдента.

28 писем группы IV, написанные между июнем и сентябрём 1929 г. были непосредственно вызваны моей рецензией в *Nature* на второе издание 1928 г. книги Фишера (1925с). И снова замечания Госсета придали мне уверенность в своих взглядах, поскольку они отличались от убеждений Фишера. И я также узнал, в каком смысле Фишер не был способен на компромиссы.

В группе V было 15 писем, написанных между июлем 1929 и апрелем 1931 г., т. е. до месяца, в котором я уже готовился к поездке в США. Стьюдент несколько раз поощрительно комментировал мои усилия по завершению рукописи экспериментального исследования устойчивости теории одномерных нормальных критериев. Тогда же я начал рассматривать критерии, относящиеся к двум и более случайным величинам и попытался овладеть дисперсионным анализом и понятием рандомизации, Стьюдент же прислал мне [оттиск] своей статьи *Полевые испытания* (Field trials) из *Hunter's Encyclopedia of Agriculture*.

Большинство писем этой группы было написано мной, и в них я сообщал об успехах в своей работе. В то время самое полезное из того, что он сделал для меня, было, возможно, предупреждение об ожидаемых трудностях при попытке спланировать выборочный эксперимент, основанный на модели различных факторов, влияющих на результат расположения латинского квадрата. Как я сказал, в этом он преуспел.

Видимо ни Стьюдент, ни Mathetes не думали, что я много получу от своей американской поездки, но они ошиблись. Поездка расширила мой кругозор, придали мне уверенность в преподавании и соответствующий опыт. Через Шухарта я прикоснулся к проблемам контроля качества в промышленности, а поскольку мои семинары в университете Айова посещал Уилкс<sup>16</sup>, в США проник взгляд на вторую ступень современной математической статистики, не полностью подчинённый диктатуре школы Фишера.

Основной темой писем Госсета 1937 г. VI, 8 – 15 была пропаганда применения сбалансированных, а не рандомизированных планов сельскохозяйственного экспериментирования. Выводы он основывал на собственном практическом опыте, и свои взгляды он опубликовал в посмертной статье (1938). Мы с Нейманом обсуждали с ним его мысли незадолго до его смерти (и посетили его в лечебнице, в которой он находился несколько недель) и добавили замечания к этой статье (там же, с. 381 – 388). Его взгляды, конечно же, прямо противоречили учению и практике *школы Фишера*, которая неизбежно сформулировала поправки [к статье 1938 г. ?]. После этого в печати дело Госсета было, видимо, проиграно ввиду его смерти. Но нельзя сказать, в какой степени экспериментаторы среди многих его корреспондентов

тов<sup>17</sup> продолжали верить в сбалансированные планы и практиковать их.

Пять лет до того, в 1932 г., Госсет никак не желал вступать в спор с К. П. по поводу критерия  $t$ , и снова, подготавливая свою последнюю статью, он указал, что эта работа заняла у него несколько месяцев *не так из-за недостатка времени, как нежелания споров.*

В ответ Йейтс (Yates 1939) опубликовал тщательно написанную статью с весьма содержательными данными в табличной форме. Не умри Стьюдент в 1937 г., вряд ли можно было бы сомневаться, что взгляды этих отважных противников постепенно сблизятся. Но никакого ответа Йейтс не смог получить, а в сентябре 1939 г. началась война. Весь спор был оставлен, и я так и не узнал взглядов полевых экспериментаторов, например, генерального инспектора лесов в Австралии, С. Е. Lane Poole.

Не имея практического опыта в планировании экспериментов, я не смог бы пытаться ответить, даже имея я время в 1939 – 1945 гг. для исследования этого вопроса. Рассуждая со стороны, я обязан решить, что ни Фишер, ни Йейтс не пытались отыскивать ошибки в советах Госсета, которые он давал и своей пивоварне, и ирландскому Министерству сельского хозяйства в качестве консультанта. Он должен был учитывать многие иные соображения помимо мер, выводимых из теории вероятностей, и вытекающих из анализа одного-единственного эксперимента при помощи так называемых *надёжных* методов. В одном из своих поучительных писем он написал мне 19 апреля 1937 г. (VI 10):

*Но на самом деле эксперименты только на одной станции почти всегда бесполезны. Вы можете сказать, что во влажной и липкой почве, как в каком-нибудь Заячьем Логе, картофель не может использовать поташные удобрения. Но если вас спросят, каковы же эти влажные и липкие почвы, то, до тех пор, пока вы не испробовали почву в других местах, вам придётся признать, что имели в виду просто в Заячьем Логе.*

*А некто может полагать, что это означает на старом пастбище в Заячьем Логе. Что Вам действительно следует выяснить, это на каких почвах и при каких погодных условиях картофель использует добавленное поташное удобрение? И чтобы ответить на этот вопрос Вам следует произвести представительную выборку ферм графства и коррелировать полученные данные с почвой и погодой. [...]*

Мало кто из статистиков-практиков обладает способностями и опытом госсетов, фишеров или йейтсов, и, чтобы предохраниться от промахов, несомненно важно обучать будущих прикладных статистиков значимости рандомизации, коль скоро она оказывается возможной при планировании эксперимента. Но это не доказывает, что Фишер был *прав*, а Госсет *ошибался*. Видимо, слишком часто забывают, что математические модели, использующие теорию вероятностей, помогают человеку принимать решения. Их построение предоставляет увлекательные упражнения математически обученному разуму, а их применение способствует

прояснению мыслей прикладного статистика при выводе последствий, приводящих к действию.

Замечание Типпета, другого заслуженного прикладного статистика, уже давно поразило меня. Он указал, что окончательное расположение данных в таблице дисперсионного анализа проливает свет на источники компонентов изменчивости даже без введения *надёжных* вероятностных мер. В недавней истории математической статистики есть много примеров разработки этих моделей, которые включают теорию вероятностей в наши размышления. Они полезны, даже если лишь приближённо описывают нашу обманчивую реальность. Например:

1. Существуют асимптотические выражения для дисперсии оценок наибольшего правдоподобия, основанные на достаточных статистиках. Они наводят на размышления, но в некоторых случаях явно неполноценны даже в выборках умеренного объёма.

2. Существует теория фидуциальных выводов, ныне, видимо, повсеместно вытесняемая более простой теорией Неймана доверительных интервалов.

3. Кто из практических статистиков сегодня часто применяет математическое понятие *количества информации*?

4. Весь подход Неймана и мой собственный к проверке статистических гипотез прояснял, как недавно заметил Типпет, способ классификации шатких мыслительных оснований многих критериев выборочных исследований, существовавших в конце 1920-х годов. Но таков был только один из подходов, – ни ошибочный, ни верный.

5. Сегодня во многих кругах в моду вошёл новобейсовский подход. Он ценен, потому что обращает внимание на то, что при принятии решений нельзя пренебрегать априорной информацией<sup>18</sup>.

И так вот всё и происходит. Неожиданно я вспомнил канцон 11, 91 – 96, из *Чистилища* Данте, который, как мне вдруг показалось, имеет какое-то отношение к сказанному.

В круге гордости, в тщетности славы,

Oh vana gloria dell'umane posse!  
com' poco verde in su la cima dura,  
se non è giunta dall'etati grosse!  
Credette Cimabue nella pittura  
tener lo campo, e ora ha Giotto il grido,  
si che la fama di colui è scura.



## 7. Общий комментарий

Осенью 1899 г. Госсет приехал в Дублин, чтобы занять должность пивовара в фирме Артура Гиннеса. Ему было 23 года, а свои способности он показал, получив стипендии, приведшие его в Уинчестерский колледж и Оксфордский университет, в котором он обучился математике и естественным наукам. Фирма Гиннес давно уже упрочилась и стала значительным деловым предприятием, и её правление решило шире применять научные методы при изготовлении крепкого портера.

Это решение было исполнено рядом назначений выпускников Оксфорда или Кембриджа, имеющих научные степени, и Госсет присоединился к группе коллег того же самого социального происхождения, в том числе лиц примерно того же возраста. Последние разделяли его интерес к отдыху на открытом воздухе, возможность которого предоставляло ирландское побережье и сельская местность. Через несколько лет он женился, и его дом возле Дублина стал центром его семейной жизни и расширявшегося круга друзей.

В первые годы своей работы Госсету пришлось заниматься анализом экспериментальных данных пивоварения. Статистических методов он не знал и обратился к стандартным учебникам по сочетанию наблюдений. В них он отыскал закон ошибок, позднее названный нормальным распределением; понятие о вероятной ошибке; распределение среднего выборочного из нормальной совокупности; трудности, возникающие ввиду *запутанных* наблюдений; решение по Эри вопроса о допустимом и недопустимом различии средних на основе вероятных ошибок; и исследование точности оценок ошибок в больших выборках по книге Мерримана, который следовал Гауссу<sup>1</sup>.

Впрочем, польза от исследований Эри и Мерримана была невелика, поскольку они имели дело, соответственно, с астрономическими и геодезическими наблюдениями при устойчивых условиях, тогда как данные пивоварни относились к малому числу наблюдений и существенно зависели от изменчивости сырья и изменений в среде, окружающей лабораторию<sup>2</sup>. Внимание Госсета было поэтому обращено на поиск методов, применимых к малым выборкам для оценки расхождений между средними и отношений между случайными величинами.

Статистические выводы у Мерримана были жёстко основаны на принципах обращённой вероятности, и поэтому, когда в 1904 г. Госсет сообщил правлению фирмы о желательности получения профессионального совета, он сформулировал свою рекомендацию в следующей форме:

*Мы столкнулись с трудностью, именно с тем, что ни одна наша книга не упоминает шансов, которые спокойно считаются достаточными для установления любого вывода, и нам смогла бы здесь помочь консультация какого-либо математического физика<sup>3</sup>.*

Посредники в Оксфорде помогли установить Госсету контакт с Пирсоном, и примерно через восемь месяцев после указанного

отчёта он и Пирсон встретились впервые. Пирсону было 48 лет. Он был исключительно энергичен, непреклонен и преследовал чёткие цели. Он руководил единственным в Великобритании и Ирландии университетским факультетом, на котором серьёзно преподавалась статистика, а аспиранты работали по цельной программе исследований.

Труды биометрической школы, созданной Пирсоном и Уэлдоном, появлялись в журнале *Биометрика*, который они основали, а он редактировал, и в мемуарах, объединяемых в специальные серии. Для всей этой работы он доставал необходимые средства. Пирсон обладал подавляющим воодушевлением, необходимым для продвижения приложения статистики к эволюции и наследственности, и силой воли для достижения того, чего одинокий и замкнутый Эджуорт никогда не смог бы добиться, несмотря на свои выдающиеся способности<sup>4</sup>.

Но по своей властной личности Пирсон лишь неохотно признавал ошибки, а расхождения во мнениях могли привести к открытой неприязни. Таким образом, оборотной стороной медали были обиды и разрыв дружественных отношений.

Общаясь с Пирсоном, Госсет столкнулся с проблемами, которые в то время ещё не обсуждались в учебниках: с идеями о корреляции и свойствах коэффициента корреляции в больших выборках, системой кривых Пирсона, критерием согласия хи-квадрат. А в биометрической лаборатории он обнаружил практический подход, которому глубоко сочувствовал. И таким образом ранняя деятельность Госсета пришлась на момент, в котором издавна установившиеся методы сочетания наблюдений в астрономии и геодезии, связанные с нормальным распределением<sup>5</sup> и оценкой параметров, объединились с потоком новых методов, разработанных в биометрической школе и связанных с зависимостями, не-нормальными распределениями и критериями согласия.

Госсет исследовал вероятную ошибку среднего, что потребовало изучения распределения дисперсии в нормальных выборках, и его работа лучше всего поясняет указанное объединение. Он отыскал это распределение, вычисляя моменты и подгоняя кривую Пирсона, но не знал, что геодезист Гельмерт (1876), как заметил Пирсон (1931с), решил эту задачу при помощи математического анализа<sup>6</sup>.

В статье Госсета появилась первая таблица студента распределения  $z$ , вообще же его исследование являло хороший пример важного открытия на границе двух научных областей, имеющих совсем различные цели<sup>7</sup>. Если же учесть дополнительную обстановку, в которой он выполнил свою работу, а именно его первенство в применении статистических методов при исследованиях в лаборатории промышленного предприятия, то сочетание обстоятельств оказывается настолько исключительным, что в какой-то мере отвечает на вопрос Фишера (1939):

*Как же случилось, что кто-то, обладающий подготовкой Стьюдента и влекомый его интересами, добился успеха фундаментальной математической значимости, возможность*



*которого просмотрели самые выдающиеся математики, изучавшие теорию ошибок?*<sup>8</sup>

Период, проведенный Госсетом в Лондоне, оказался началом его дружбы с Карлом и Эгоном Пирсонами, продолжавшейся всю жизнь. Он навсегда сохранил сильный интерес к их статистической деятельности и в биометрической лаборатории, и в позднее учрежденном факультете прикладной статистики и, проезжая через Лондон, он обычно посещал Университетский колледж. В связи со своей работой он жил в Дублине в течение почти всей своей карьеры, и поездки в Лондон по морю, а затем поездом обычно начинались поздно вечером и заканчивались на следующий день пополудни.

Госсет был поэтому несколько изолирован в небольшой английской общине, которая пережила период ожесточенных гражданских беспорядков между восстанием 1916 г. и гражданской войной 1922 г. Он явно стремился чаще встречаться со своими друзьями в Англии, и 27 июня 1923 г. объяснил своё желание Фишеру:

*Хуже всего жить в этой свинской (beastly) стране потому, что годами нельзя просить христиан побыть с тобой, так что приходится проводить пасхальные каникулы дома*<sup>9</sup>.

Впрочем, возможности тогдашней почтовой службы намного превосходили нынешние, он же, как все его современники, был восторженным корреспондентом, хоть и не попал в один и тот же разряд с Пирсоном, архив которого содержит более 16 тысяч писем. В те времена, когда редко проводились профессиональные конференции, статистическая переписка Госсета была средством оставаться в курсе успехов в методологии, а кроме того она предоставляла возможность соучастия своими комментариями, рекомендацией тем для исследования и предложениями помощи.

Он непременно оставался обходительным и внимательным, никогда не важничал и не обижался. Его неприязнь к спорам не означала готовности к компромиссам. Он стремился описывать свои достижения исключительно скромно, иногда умаляя их, и беспечно анализируя свои предполагаемые недостатки. Почти все свои письма он писал дома от руки, и почти все, отправленные со служебного адреса, относились к деятельности пивоваренной фирмы Гиннес. На вопросы он обычно отвечал в день их получения, иногда поздно вечером, и на следующий день часто добавлял дальнейшие соображения. Переписка Госсета отражает его честность и более чем достаточно подтверждает его личные черты, о которых вспоминали хорошо знавшие его.

Наибольший статистический интерес в письмах Госсета К. Пирсону вызывает период 1907 – 1919 гг. Вслед за его работой о вероятной ошибке среднего последовала более обширная таблица распределения студента распределения  $z$ . Его открытия в области корреляции распространились от первого метода проверки для малых выборок до оценки коэффициента [корреляции] по одновременным временным рядам и обработки ранжирования при наличии совпадений. Повторное открытие экспоненциального предела бинома привело его к исследованию

предпосылок распределения Пуассона, изучение понятия смеси и почти полное возвращение (and almost complete the circuit) обратно к отрицательному биномиальному распределению.

Пирсон признал оригинальность Госсета, воспринял его рекомендацию об оценивании и спрашивал его совета о планировании эксперимента. Вскоре, однако, они разошлись по поводу приложения теоремы Бейеса. Пирсон был готов применять не равномерное априорное распределение к правдоподобию такого параметра, как коэффициент корреляции, на основе прежнего опыта в родственных областях. Тем не менее, Госсет осознал, что подобная практика легко может привести к просмотру особых характеристик материала и завышению оценки. Он убеждал, что в первую очередь следовало применять только равномерные априорные распределения.

Первая мировая война взвалила на К. П. большую ношу дополнительной работы, которую Госсет очень хотел облегчить. Этот сдвиг вида исследований [вызванный войной] совпал с постепенным изменением в направлении исследований Госсета от лабораторных и пробных опытов с растениями к полевым сельскохозяйственным экспериментам. Наибольшую часть прежних тем он оставил другим и по своим интересам отошёл от Пирсона. После 1920-х годов сохранившаяся переписка в основном носит личный характер, она содержит школьные фотографии и оценки, но мало новых комментариев о работе факультета прикладной статистики.

К этому времени Пирсон *возможно стал немного нетерпим к критике*, Госсет же имел более чем достаточно работы по вечерам. В конечном счёте он понял, что К. П. стал сварлив и отчуждён, но преданность к своему бывшему профессору осталась у него на всю жизнь, и тон его писем был уважительным и благожелательным даже когда он должен был чувствовать себя жестоко изведенным.

Когда Фишер начал посещать лекции своего наставника, Страттона, по сочетанию наблюдений, он столкнулся с традицией, которая повлияла и на статью Госсета о вероятной ошибке среднего. И таким образом общий фон у него и Фишера способствует объяснению их первого знакомства. Статья Госсета сильно подействовала на Фишера и привела к его примечательной разработке теории нормальных выборок, вершиной которой оказалось (1928b) обобщение выборочного распределения множественных коэффициентов корреляции в многомерном случае.

Время от времени упоминая работы Госсета в период 1915 – 1938 гг., Фишер почти всегда ссылаясь на его статью (1908a) о распределении  $z$ , и её же он подробно рассматривал в некрологе (1939). Его комментарии были всегда благоприятными, и в них встречаются выражения, подобные *блестящим исследованиям и революционным шагам*. В основном статья Госсета [1908a?] основана на *прямых* вероятностях, но он воспринял современные идеи о статистических выводах, применявших обращённую вероятность для выражения своих выводов.

К 1916 г. К. Пирсон решил, что при обращении к теореме Бейеса выбор равномерного априорного распределения являлся произвольным. Утверждение Фишера о том, что его абсолютный критерий, ставший известным как метод наибольшего правдоподобия, выводится из принципа обращённой вероятности, таким образом оказалось источником изрядной путаницы. К. П. критиковал предположенное применение Фишером обращённой вероятности при оценке коэффициента корреляции, тогда как Госсет приветствовал его предположенную приверженность классическим принципам. Тем не менее, он [1908a] фактически усилил реакцию против обращённой вероятности, а после 1916 г. Фишер чётко отказался от априорных распределений.

С точки зрения основ статистических выводов можно сильно пожалеть, что скромность Госсета привела к тому, что он лишь формулировал ряд весьма пронизательных замечаний к этой теме. При обсуждении примеров он (1908a) выразил Р-значение через кратное вероятной ошибки при нормальном распределении и тем самым его вывод приобрёл форму, которая в XIX в. стала стандартной в астрономии и геодезии. В этих науках *вероятная ошибка* измерения определялась как такое отклонение от истинного значения, которое с равной вероятностью может оказаться и больше, и меньше его<sup>10</sup>.

Отклонения вплоть до удвоенной вероятной ошибки не являются чрезмерными, и поэтому лишь при отклонениях, превышающих утроенную вероятную ошибку, появляются серьёзные основания для сомнений<sup>11</sup>. Кроме того, скорость убывания нормального распределения на своих хвостах означала, что учетверённая вероятная ошибка считалась недопустимой. Применение вероятных ошибок можно истолковать как относящееся к апостериорному распределению по Бейесу при равномерном априорном распределении, однако с тем же успехом его можно понимать и не по Бейесу как переход от среднего при нормальном распределении к неправдоподобию предположений, которые подразумевают подобные отклонения.

К. П. обычно истолковывал Р-значения, выведенные из его критерия хи-квадрат, как шансы за или против соответствия подогнанных кривых, но представляется, что ни он, ни Госсет не чувствовали необходимости попытки достижения большей логической строгости. Действительно, когда Госсет узнал от Фишера, что в таблицах  $\chi^2$  следует исходить из меньшего числа степеней свободы, чем указывалось правилами Пирсона, он заявил, что ему придётся привыкнуть к применению более высоких Р-значений, как будто заданное Р-значение было лишено безусловного смысла.

В свете позднейших исследований трудностей в представлении точного смысла вероятностей точка зрения Госсета означает больше, чем быть может кажется. В то же время занятно подумать о том, что причиной его первой встречи с К. П. он указал желание выяснить соотношение шансов, которое *считается* (conveniently accepted) *достаточным для установления каких-либо выводов*.

Понятие *строгого уточнения неопределённости* было введено когда Фишер составил таблицы распределений  $t$  и  $z$  и  $\chi^2$  в функции их процентных точек. Он настаивал на точности этих распределений, и умалывал значимость вероятной ошибки (*в чью пользу свидетельствует лишь их широкое применение*), что привело (all served) к уточнению логики статистических методов. В известном смысле этот процесс достиг вершины в классической статье Neuman & Pearson в 1933 г.<sup>12</sup>.

Это, в сочетании с настойчивым требованием Фишера в различении двух форм измеримой неопределённости (которые он назвал *математической вероятностью* и *правдоподобием*) в течение примерно 20 лет после 1930 г., привело к тому, что обращение к априорным распределениям параметров почти исчезло из литературы по математической статистике. Впрочем, даже в 1922 г. Госсет, видимо, желал бы считать правдоподобие *обращённой вероятностью*, возникающей при равномерном априорном распределении оцениваемого параметра. Как было указано в гл. 5-й, он осознал то важное обстоятельство (не всегда учитываемое позднейшими приверженцами байесовских методов), что выводы о данном параметре  $\theta$ , полученные из различных источников, можно непосредственно сравнивать друг с другом или сочетать, только если каждый вывод основан на равномерном априорном распределении  $\theta$ .

Госсет очевидно был намного меньше, чем Фишер, убеждён тем доводом, что при неизвестном  $\theta$  неизвестно и  $\theta^3$  и равномерное априорное распределение  $\theta$  несовместимо с таким же распределением  $\theta^3$ . Его точка зрения быть может была связана с тем, что он обычно имел дело с *размерными* параметрами, как, например, урожаем, тогда как в своих генетических исследованиях Фишеру приходилось изучать величины, подобные рекомбинационным дробям, для которых размерность определялась намного хуже. Спросили бы Госсета, почему он был готов признать, что априорно равномерно распределена прибавка урожая, а не её куб, он вероятно спросил бы в ответ, какой смысл можно придать этому кубу.

После прибытия Фишера в Ротамстед его интересы неизбежно дополнительно включили полевые сельскохозяйственные эксперименты, а так как Госсет к тому времени мог поделиться своим большим опытом, то [Фишер] естественно старался советоваться с ним. Но от Бивена Госсет приобрёл глубокие знания в практических преимуществах систематизированных планов, а у Пирсона перенял точку зрения о том, что многое можно объяснить корреляцией. Таковы были два стержня, на которых основывались его мнения о сельскохозяйственных экспериментах.

Идеи Фишера, которые он вскоре ввёл в литературу, а именно применение рандомизированных планов, должны были рано или поздно войти в противоречие с Госсетом либо в печати, либо в письмах. Тем временем Госсет содействовал подготовке книги Фишера (1925с), выполняя на арифмометре нудные вычисления, предлагая полезные видоизменения текста и вычитывая

корректуру, что ускорило публикацию. По мере того, как одно издание книги следовало за другим, важнейшее из его ранних открытий стало признаваться шире, чем это могли обеспечить страницы *Биометрики*.

[Форма] представления таблиц  $\chi^2$  Пирсона и  $t$  Стьюдента [у Фишера] оказалась следствием проблем авторского права, но ознаменовала отход от прежней системы вычисления Р-значений и их истолкования в качестве обращённой вероятности. Взамен, как *более удобные*, рекомендовались фиксированные уровни значимости, которые образовали основу вскоре появившейся теории Неймана – Пирсона. Но через 30 лет Фишер указал в своей книге (1956), что *никто из исследователей не имеет фиксированного из года в год и при всех обстоятельствах уровня значимости для отбрасывания гипотез*. Ныне от фиксированных уровней постепенно отказываются, заменяя их системой, в которой Р-значения в целом оценивают все свидетельства против начальной гипотезы. Это указывает на возврат к идеям К. Пирсона 1900 г.

Переписка Госсета и Фишера была уравновешенной и в целом спокойной, и ей способствовала взаимная помощь и уважение. Началась она с того, что Госсет ободрял молодого и подающего надежды человека и заканчивалась советами Фишера занятому управляющему высокого ранга. Их общие интересы привели к различию мнений, но неприязнь к спорам, искусство дипломатии и чувство юмора Госсета оказались бесценными качествами. Контакты между К. Пирсоном и Фишером в конечном счёте осуществлялись через Госсета, но при несогласии с кем-либо из этих мощных и противостоящих друг другу личностей он никогда не шёл на компромиссы.

Дар слова Фишер применял в основном в науке, но он был мастером дискуссий и искусно применял полуправды. В конце концов Госсету пришлось откликнуться, когда Фишер начал открыто порицать его, и их стычки по поводу планирования экспериментов оказались более серьёзными, потому что к тому времени спорщики утвердились в своих взглядах. И всё же Фишер (1939) тепло отозвался о своём покойном преданном и великодушном друге, хотя и включил даже в некролог язвительные полемические замечания в адрес К. П., Э. П. и Неймана.

В 1921 г., после участия в военных исследованиях и окончания своего математического обучения, Э. Пирсон стал ассистентом факультета прикладной статистики своего отца. Воздействие ранних трудов Фишера по теории нормальных выборок и дисперсионному анализу совместно с введенным им понятием правдоподобия и новой теорией оценивания было огромным, и Э. П. начал размышлять о фундаментальных идеях статистических выводов.

К 1926 г. он убедился, что его и К. Пирсона статистические взгляды заметно отличались друг от друга, но разрешить сомнения было нелегко, поскольку сын привык глубоко уважать отца, сильная личность которого сочеталась с отвращением к критике со стороны других. В это критическое для своей

профессиональной карьеры время Э. П. обратился за советом к Госсету, а в поисках совместной работы – к Нейману. Госсет был известен на факультете, и, будучи на 20 лет старше Э. Пирсона, мог дать ему разумный совет, поделиться своим практическим опытом и тепло поощрить его. По существу, он заполнил место, которое К. П. не был способен занять.

Нейман был примерно того же возраста, что и Э. Пирсон, романтиком, чья пленительная история жизни увлекла воображение последнего, а его математические знания идеально дополняли здравый смысл и зрительное восприятие Э. П. Общение с Госсетом и Нейманом оказывало влияние на статистическую деятельность Э. Пирсона до ранних 1930-х годов, но затем направление его работы стало самостоятельным. В основном он стал заниматься статистическими методами в промышленности, практическими проблемами статистических выводов и редактированием *Биометрики*.

В течение этого более позднего периода Э. П. неизменно помнил о своём долге Госсету. Он (1939) опубликовал длинный очерк о Стьюденте как о статистике, присоединённый к очерку другого автора (McMullen 1939) о Стьюденте как о человеке. В нём Пирсон тщательно исследовал раннюю деятельность Госсета в пивоварне фирмы Гиннес и его последующие статьи в *Биометрике*. [Вообще же] в 1960-е годы появилось несколько статей по истории статистики, и некоторые из них устанавливали место Госсета в общем английском вкладе в развитие современных статистических методов.

После выхода на пенсию Э. П. вначале был занят редактированием большого материала, собранного К. Пирсоном для курса лекций по истории статистики. [В результате вышла книга К. Pearson (1978).] И, наконец, Э. П. взялся заново проникательно рассматривать роль Госсета в его, Э. П., карьере до первой мировой войны и ранние отношения Стьюдента с К. Пирсоном. Эта последняя и почти законченная дань Госсету объёмом почти в двести машинописных страниц выражает сердечную признательность автора за великодушные своего старшего по возрасту друга. Рукопись оказалась исходным началом этой книги.

Стороны характера К. Пирсона и Госсета в их зрелом возрасте и Фишера и Э. Пирсона в более ранних периодах их карьер хорошо усматриваются в эпизоде, который последовал за публикацией рецензии Э. П. на книгу Фишера (1925/1928). Справедливый комментарий вызвал у Фишера приступ гнева, подобия которого позднее стали омрачать его отношения даже со многими родственниками и друзьями. Неуверенность Э. Пирсона в себе в сочетании с благоговением, которое Фишер внушал современникам, оказались серьёзной помехой надлежащему ответу, но Госсет представлял себе эти обстоятельства и вмешался. По мере того, как Фишер постепенно вразумлялся, старания Госсета отыскать мирный исход почти привели к успеху, но в самый критический момент он указал в письме в качестве своего адреса гальтоновскую лабораторию. Э. П. представлял себе, что её директор [К. П.] может возражать, но застенчивость привела к молчанию, а возра-

жение К. П. пришло незамедлительно, хоть Госсет и был другом двадцатилетней давности. Всё в конце концов уладилось, поскольку Госсет как-то помирился с К. Пирсоном и здраво оценил притязания Фишера. Имея дело с такими непреклонными людьми, чей пыл остывал только для того, чтобы вновь вспыхнуть в другом месте и в другое время, никто не смог бы добиться большего.

И всё же, даже при обмене этими острыми письмами были заметны признаки взаимного уважения, если не расположения. В своём письме<sup>13</sup> К. П. несколько сожалел, что Госсет не имел права указывать гальтоновскую лабораторию как свой адрес, а Фишер предложил тот подход к проблеме, который и имел в виду Стьюдент и о котором, как он сказал, естественно мог бы подумать студент Стьюдента. Дополнительные сведения о соотношении между указанными лицами в тот период сообщил Э. Пирсон в добавлении к отчёту о своей переписке с Госсетом:

*В 1933 или 1934 г. произошёл эпизод, который я никогда раньше не описывал. Он интересен, потому что проясняет отношения, существовавшие в то время между К. П., Р. Э. Ф., Э. С. П. и У. С. Г. [Госсетом]. Р. Э. Ф. спросил меня, не обращаюсь ли я к К. П. с предложением о том, чтобы он и сам Р. Э. Ф. представили кандидатуру Госсета в члены Королевского общества. Боюсь, что я ничего не сделал.*

*Здесь я не имел никакого веса и опасался пренебрежительного отказа, который ухудшил бы наши отношения. Я знал, в какой мере К. П. был задет тем, что Р. Э. Ф. раздробил (scattered) содержимое ценного им музея<sup>14</sup>. Помню, что в 1931 г. К. П. опубликовал три статьи, критикующие работы Стьюдента по критерию  $t$ . В то время он и ко мне относился отрицательно, потому что я защищал многие методы Р. Э. Ф. В конце концов это дело меня никак не касалось. Если Фишер не хотел сам написать К. П., он мог попросить Юла или Гринвуда, давно ставших членами Королевского общества, объединиться с ним. Согласился бы К. П. или нет, ясно, что если бы он и Р. Э. Ф. совместно представили кандидатуру Госсета, он был бы избран. Его можно поэтому считать несостоявшимся членом Королевского общества.*

Научные публикации Госсета и его переписка взятые совместно показывают, что его вклад в успехи статистических методов в промышленности и сельском хозяйстве намного превосходит по своей значимости его критерий  $t$ , с которым навсегда будет связан его псевдоним. В 1909 г. ему сказали, что он должен считать себя в первую очередь пивоваром и лишь после этого – статистиком, но на протяжении остальной части своей карьеры он продолжал составлять статистические статьи, а его работы о сравнительных преимуществах сбалансированных и рандомизированных схем планирования эксперимента всё ещё привлекают к себе внимание.

Госсет критиковал Ланаркширский эксперимент [§ 5.4.5], потому что рандомизированное распределение школьников на его участников и членов контрольной группы было видоизменено. Но

в своей последней статье он привёл доводы в пользу систематических планов полевых экспериментов.

В 1939 г. Э. Пирсон ожидал, что разногласия о рандомизации будут разрешены в течение 10 или 20 лет, но в 1979 г. он указал, что спор был оставлен с началом второй мировой войны. Примерно с 1950 г. исследования рандомизации неизменно продолжались, и теперь они сосредоточились на двух серьёзных вопросах, на составлении наилучших планов при условии, что погрешности считаются коррелированными, и на ограниченной рандомизации, при которой план выбирается из подмножества возможных схем. Таким образом, компромисс между Фишером и Госсетом был, видимо, достигнут со строго математической точки зрения беспристрастным исследованием идей, которые они так упорно отстаивали.

Примерно с 1970 г. сильно возрос интерес к экономическим и социальным проблемам науки, появились биографии коллективов, а сама наука была описана как совместное предприятие, направленное на определённые цели. MacKenzie (1981) объяснил работу Госсета о вероятной ошибке среднего попыткой увеличить прибыль фирмы Гиннес и желанием продвинуться по службе. Разработка теории малых выборок вполне могла обернуться фирме финансовой выгодой, однако обобщение существовавшей теории было весьма вероятно вызвано у Госсета одной только умственной привлекательностью.

А разгадки желаний всегда являются рискованной областью. Как преданный служащий фирмы, Госсет был типичным представителем своего времени. Его предположенное стремление выдвинуться не обосновано никакими фактами, хотя, конечно же, лишь немногие служащие любой организации возражали бы против повышения в должности. Краткое размышление о жизни и деятельности этого замечательного человека достаточно для того, чтобы ясно понять его приверженность научным достижениям, часто весьма отдалённую от работы пивовара, и его неизменное желание помочь друзьям при обстоятельствах, не имеющих отношения к его карьере<sup>15</sup>.



## Примечания

### Глава 1

Биография Эгона Шарпа Пирсона (Bartlett 1981) описывает историю его жизни и обзоре его статистические публикации. Имеется и более краткая биография (Bartlett & Tippet 1981), некрологи (David 1981; Johnson 1981) и похвальная оценка его творчества (Moore 1975). Reid (1982) собрал высказывания о нём. Ред.

1. Мы уже давно перестали удивляться тому, что математики и статистики не знакомы с теорией ошибок (в первую очередь – с сочинениями Гаусса). Это невежество неоднократно проявляется и здесь, в данном случае (и ниже), в бессмысленном отрыве теории ошибок от сочетания (линейных) уравнений. О. Ш.

### Глава 2

Развитие статистических методов в XIX в. изучалось в книжной литературе (Cullen 1975; MacKenzie 1981; Porter 1986; Stigler 1986) и в обзоре Mairesse (1989). Её систематически описывал Шейнин (1980; 1982; 1984a; 1984b; 1985; 1986). Две статьи Эгона Пирсона о К. П. [статья с продолжением], появившиеся в *Биометрике* в 1936 и 1937 гг., были перепечатаны в книжной форме (E. Pearson 1938). Существенными источниками сведений о нём являются также некролог Yule & Filon (1936) и его научная биография (Eisenhart 1974).

Norton (1978) и Kevles (1985) описали некоторые стороны его карьеры и взглядов, а библиографию его сочинений составили Morant & Welch (1939). Э. Пирсон опубликовал избранные статистические статьи К. Пирсона (1948). Приложения к его же книге (1938) содержат планы лекций, которые К. П. прочёл в Грешем-колледже и Университетском колледже, а также и сводку лекций, прослушанных Юлом, она же и в статье Юла (1938). Лекция К. П. 1 ноября 1892 г. была опубликована (K. Pearson 1941). [См. отредактированные лекции: К. Пирсон (1978).]

Рукописи и письма К. П. хранятся в зале рукописей Университетского колледжа, и их перечисление см. Merrington et al (1983). Рукописи включают все сохранившиеся письма Госсета к нему. Ред.

1, § 2.1. В Библиографию были включены наши статьи о приложении статистического метода в различных отраслях естествознания, однако здесь редакторы упустили из вида эти области статистики. О. Ш.

2, § 2.2. Это утверждение не раскрыто. Самым интересным в середине XIX в. было введение теории вероятностей в теорию ошибок (Т. Симпсон, 1756 и 1757, см. Шейнин (2013, § 7.3.1)), которая вплоть до 1920-х годов оставалась основной областью её приложения. О. Ш.

3, § 2.2. Гаусс (1809, § 176) действительно доказывал принцип обращённой вероятности при равных априорных вероятностях нескольких гипотез, однако Whittaker & Robinson (1924/1949, с. 219) заметили, что введенный им постулат (термин Бертрана) о предпочтительности среднего арифметического исключил необходимость в этом принципе. О. Ш.

4, § 2.2. Доказанное Муавром (в 1733 г.) уже было простейшим вариантом центральной предельной теоремы О. Ш.

5, § 2.2. Такова была знаменитая формула Гаусса (1823, § 38), на которую нам ещё придётся ссылаться, Лаплас же (см. чуть выше) ввёл критерий минимума абсолютного ожидания погрешности, и уже Гаусс (1823, § 6) заметил, что он *в высокой степени неудобен*. Введение матриц (см. ниже), о которых Гаусс ещё не знал, было явной модернизацией, допущенной редакторами. О. Ш.

6, § 2.2. Neumann (1984) обозрел различные стороны карьеры Де Моргана и призвал современного (modern) биографа продолжить его работу. Ред.

Воспользуемся пожеланием автора! Де Морган (1864) первым заметил появление нормального распределения у Гаусса, но допустил непонятные утверждения об отрицательных и превышающих единицу вероятностях. Более

того, в письме 1842 г. он (Sophia De Morgan 1882, с. 147) заявил, что тангенс и котангенс бесконечности равны  $\pm\sqrt{-1}$ . О. Ш.

**7, § 2.2.** Соотношения между различными обоснованиями были хорошо известны. Лаплас опирался на несколько вариантов (не строго доказанной им) центральной предельной теоремы, т. е. в первую очередь на существовании большого числа измерений. В геодезии их почти не было, да и вообще было бы опасно рассчитывать на постоянство их закона распределения, см. прим. 10 ниже. Далее, Гаусс отказался от своего первого обоснования и подчёркивал это в своей переписке, см. Шейнин (2013, § 10A4-2), так что и здесь никакого вопроса не было. О. Ш.

**8, § 22.2.** Эллис был способным математиком, а его широкие интересы простирались до соображений о лучшем методе составления китайского словаря. Его здоровье никогда не было хорошим; многие годы он страдал от ревматизма и умер в возрасте 42 лет. Сборник его статей был опубликован в 1863 г. Ред.

**9, § 2.2.** Глейшер опубликовал много статей об определённых интегралах. Ему нравилось составлять математические таблицы и он интересовался историей математики (Forsyth 1929). Ред.

Об Эдрейне см. Шейнин (2013, § 10A1.3). Его выводы нормального распределения были негодными, но их подхватили Гершель (1850) и другие учёные. О. Ш.

**10, § 2.2.** Уже в 1818 г., а затем в 1838 г. Бессель должен был заметить, что погрешности наблюдений Брадлея не вполне подчинялись нормальному закону, но он недопустимо упустил этот факт (Шейнин 2013, § 10B). В середине XIX в. о не-нормальных погрешностях наблюдений стало хорошо известно, а в 1886 г. Ньюком заявил, что ряды астрономических наблюдений лишь в исключительных случаях следуют единому нормальному закону (Шейнин 1995, с. 176). О. Ш.

**11, § 2.2.** О правиле последовательности событий см. Zabell (1989). О. Ш.

**12, § 2.2.** Гаусс (1823) как раз и отделил нормальный закон от метода наименьших квадратов. Сколько раз можно ошибаться? О. Ш.

**13, § 2.2.** В пользу этого обоснования высказались в то время ещё два автора (Ivory 1825, с. 7; Galloway 1839, с. 205 и 210). О. Ш.

**14, § 2.2.** Критерий Пирса был слишком громоздок и не применялся. Известным стал критерий Шовене (Chauvenet 1863/1960, т. 2, с. 558 – 566), см. Шейнин (2007, § 7.1), однако ввиду наличия в наблюдениях систематических ошибок подобные критерии почти бесполезны, см. там же (§ 5.4.3) разумное мнение Гаусса. Теперь о Петерсе. В своём выводе он допустил оплошность, но его результат всё же не был ошибочным (Шейнин 2013, § 10B). О. Ш.

**15, § 2.3.** Чупров (1909/1959, с. 27 – 29) назвал Эджуорта талантливым статистиком (и экономистом), слишком оригинальным и по существу и по стилю своих сочинений. Сильно повлиять на своих современников он поэтому не смог, но подготовил почву для восприятия идей и методов биометрической школы. О. Ш.

**16, § 2.4.** Рецензия на книгу Эри должна была бы появиться в *Nature*, да только этот журнал начал выходить в 1870 г. Ред.

Эри был крупным учёным (оптиком и небесным механиком). В 1850 г. Королевское астрономическое общество наградило Отто Струве золотой медалью, Эри же докладывал Обществу о научных заслугах лауреата. О. Ш.

**17, § 2.4.** Гаусс резко отозвался о вероятной ошибке (Шейнин 1979, § 5.5), а Фишер заявил, что в их пользу *свидетельствует лишь их широкое применение*. Эту цитату редакторы привели в гл. 7 без указания источника. О. Ш.

**18, § 2.4.** Эта формула верна только для нормального распределения. О. Ш. Harvey (1822), также и в первом отчёте Британской ассоциации по продвижению науки, применил термин *минимальные квадраты*, но Ivory (1825 – 1826), Ellis (1844), Galloway (1846) и Donkin (1857) перешли к *наименьшим квадратам*. Ред.

**19, § 2.4.** Медиану ввёл Курно (Cournot 1843, § 34), но употреблял её ещё Бошкович (Шейнин 2013, § 7.3.2). О. Ш.

**20, § 2.4.** Вопреки некоторым авторам, в том числе Фишеру (1939, с. 3; 1951, с. 39) Бессель здесь не при чём. Указанную формулу ввёл Гаусс, см. основной текст, относящийся к прим. 5 этой главы. О Петерсе см. прим. 14 выше. О. Ш.

**21, § 2.5.** Мы можем указать сочинения Fechner (1897) и Bruns (1906). Для характеристики коллектива (термин, более всего известный в связи с частотной теорией Мизеса) Фехнер ввёл несколько средних и рассматривал их взаимное положение (Шейнин 2004). О. Ш.

### Глава 3

Основным источником сведений о жизни и деятельности Госсета являются обзоры McMullen (1939) и E. Pearson (1939) вместе с описанным машинописным текстом К. Пирсона и перепиской самого Госсета. Слегка видоизменённый вариант обзора McMullen перепечатан в качестве предисловия к сборнику статей Стьюдента 1942 г. Некролог, опубликованный Фишером (1939), был в большей части посвящён распределению  $t$  и интересу Госсета в теории эволюции. Письма Госсета Фишеру в период 1915 – 1936 гг. вместе с некоторыми письмами Фишера Госсету были собраны в четырёх томах с добавлением тома сводок, составленными самим Фишером, и предисловием McMullen. В 1962 г. фирма Гиннес перепечатала этот материал и распространила его. Оригиналы писем Госсета и письма Фишера *под копирку* хранятся в библиотеке Университетского колледжа, MS ADD 274. Cunliffe (1976) привёл выдержки из воспоминаний племянника Госсета, George Philpotts, и описал фирму Гиннес с точки зрения её бывшего сотрудника. Boland (1984) составил краткую биографию Госсета, а Vox (1987) описала обстановку, в которой Госсет работал в пивоварне Гиннес. Ред.

**1, § 3.2.** Госсет сравнил средние и средние квадратические отклонения в качестве оценок модуля [произведения  $\sqrt{2}$  на стандартное отклонение] нормального распределения и заявил, что вторая лучше первого *в соотношении 114/100*. Он несомненно выбрал это соотношение из книги Merriman (1884), но восходит оно к Гауссу (1816), см. § 2.4.

Когда Фишер (1920) ввёл идею достаточности, он ещё не знал, что сравнение тех же оценок точности Гаусс произвёл более ста лет до него в том смысле, что апостериорные дисперсии при равномерных априорных распределениях асимптотически равны выборочным дисперсиям. Ред.

**2, § 3.2.** Этот возникший интерес Госсета к экспоненциальному пределу биномиального распределения установила Бокс. Ред.

Связь этого примечания с основным текстом неясна. О. Ш.

**3, § 3.3.** Письма от H. G. Lane Poole 1912 г. и Юла 1913 г. с просьбами о совете хранятся в архиве Пирсона № 284. В длинном письме 1938 г. к Э. П. Lane Poole выражает свою глубокую признательность за серьёзную помощь, которую оказал ему Госсет в преодолении трудностей при планировании экспериментов для изучения лесопосадок. Самым регулярным корреспондентом Госсета был, видимо, Эдвин Бивен, друг с 30-тилетним стажем, чьи рукописи хранятся в Институте истории сельского хозяйства в университете г. Рединга. Ред.

**4, § 3.4.** Мы можем только привести английский текст.

If your difficulty with the aeroplane propeller is that the blade as a whole turns more at high speed than at low, both being required, some system of sliding the blade in a suitably rifled socket attaching to the hub by a spring might work. Then centrifugal force might be made to twist the blade as a whole forward when the increased resistance was twisting the working part back so as to keep the angle of the working part constant. О. Ш.

**5, § 3.4.** Протоколы со сводками прочитанных докладов и переписке о роспуске общества хранятся в архиве Пирсона № 254. Ред.

**6, § 3.5.** Kendall (1952) заканчивает свою биографию Юла отрывками из его переписки, один из которых таков:

*Недавно Госсет пришёл повидать меня. Он очень приятный парень и совсем не деспот таблицы  $t$ .*

В течение большей части XIX в. и в начале XX в. была хорошо известна книга Oliver Wendell Holmes, *The Autocrat of the Breakfast Table (Деспот за столом к завтраку)*. Ред.

Игра слов. В английском языке *таблица* (у Госсета) и *стол* у этого автора обозначаются одним и тем же словом *table*. О. Ш.

#### Глава 4

**1, § 4.2.** Жизнь и труды Шеппарда (William Fleetwood Sheppard) описали N. F. Sheppard et al (1937). MacKenzie (1981) обсудил его переписку с Гальтоном. Ред.

**2, § 4.2.** Герберт Эдуард Сопер был способным статистиком и обладал сильным характером. Greenwood (1931) воздал должное и тому, и другому. Мнение современников о статье Soper (1913) выражено в письме Юла Госсету 13 мая 1913 г. (архив Пирсона № 284). Госсет заметил, что эта статья мало помогает исследованию обратной задачи, и Юл предположил, что априорное распределение  $R$  лучше определять эмпирически, чем принимать его равномерным. Ред.

**3, § 4.2.** Сотрудники Пирсона, в основном женщины, часто работали без вознаграждения. Beatrice Mabel Cave и Frances Evelyn Cave-Brown-Cave были дочерьми сэра Thomas Cave-Brown-Cave [...]. Alice Lee выполняла важную часть работы для К. П., сопровождала его семью во время отпусков и сочиняла баллады для юношеского журнала *Biochronicle* Эгона Пирсона. Love (1979) исследовал её научную карьеру. Ред.

**4, § 4.2.** В 1896 г. Пирсон вывел *лучшее значение* коэффициента корреляции сведением к максимуму его апостериорного распределения при всех равномерных априорных распределениях. Позднее он решил, что это *правило Гаусса логически ошибочно*, потому что выбор *равномерного* априорного распределения был произволен.

При сравнении методов оценки параметров Smith (1916) предпочла минимум  $\chi^2$  гауссову принципу, поскольку вместо плотностей применяются конечные вероятности. Фишер доказывал, что значение  $\chi^2$  зависит от способа группировки данных и что его абсолютный критерий, *выведенный из принципа обращённой вероятности*, исключает необходимость произвольного группирования. Пирсон ответил, что логика *правила Гаусса* должна быть обоснована и не согласился с доводами Фишера о группировании. Фишер представил дополнительное обоснование своей критики, но К. П. отклонил его рукопись как спорную. Начиная с 1922 г. преимущества метода наибольшего правдоподобия стали очевидными, но в 1916 г. теория оценивания покоилась на гораздо менее надёжном основании и давала повод к путанице и недоразумениям. Подробности этого спора К. П. с Фишером обсудил Эгон Пирсон (1968) и Edwards (1974). Ред.

**5, § 4.2.** Лекции К. П. о Кондорсе, прочитанные осенью 1927 г., включают следующие замечания о равномерных априорных распределениях (1978, с. 499 – 500):

[...]  $f(x)$  *представляет наш предшествующий опыт о распределении  $x$  и не является постоянной величиной. Мы, стало быть, распределяем наше незнание не равномерно, а в соответствии с предшествующим опытом об  $x$ .*

*Я знаю, что уже много лет тщетно проповедовал это учение в пустыне, и своим предложением нажил себе вечного врага в лице заслуженного статистика. Но я верю, что оно верно.* Ред.

**6, § 4.2.** Удержание явно избыточных цифр было данью традиции, которой придерживался и Гаусс (§ 2.4) и даже Фишер (*Science*, vol. 84, 1936, с. 289 – 290). О. Ш.

**7, § 4.3.** Об истории метода последовательных конечных разностей см. обзор Yule (1921) и Tintner (1940). Некрологи Yule (1944) и Wold (1961), посвященные памяти Гукера (Reginald Hawthorn Hooker) и Оскара Андерсона, приводят подробные сведения об их карьере. Архив Чупрова в Московском университете хранит письмо Андерсона 17 июня 1914 г. о представлении рукописи в *Биометрику* и копию ответа Пирсона. За эти сведения мы благодарны Оскару Шейнину. Ред.

Редакторы называют этот метод двояко, либо включая слово *корреляционный* (как, например, в § 2.5), либо нет. О. Ш.

**8, § 4.3.** Позднее Сэр Дениел Холл, директор Wye College и Ротамстедской экспериментальной станции (Russell 1966). Ред.

**9, § 4.3.** Краткую биографию Edward Gordon Peake см. J. A. Venn (1953). Ред.

**10, § 4.3.** Переписку Андерсона с К.Пирсоном см. Шейнин (1990/2010, с. 192 – 194). Приведенную редакторами цитату (мнение К.П. о Госсете) мы в своё время сообщили редактору Р. Л. Плакетту, ср. конец прим. 7. О. Ш.

**11, § 4.4.** Пуассон (1837) рассматривал последовательность независимых испытаний с вероятностью успеха  $p$  и неудачи  $q$ . Он выразил верхний хвост биномиального распределения числа успехов в  $\mu$  испытаниях как нижний хвост отрицательного биномиального распределения для частоты  $m$  успехов, а затем вывел кумулятивный экспоненциальный предел при  $q \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow \alpha$  и  $q\mu = w$ .

Newscomb (1860) предложил применять это предельное распределение для подгонки к данным наблюдения, а Abbe (1878) применил его к обработке подсчётов кровяных шариков на гемцитометре. Борткевич (1898) заметил, что экспоненциальный предел биномиального распределения вывел Пуассон и подогнал распределение Пуассона к статистике самоубийств женщин в Германии и смертей прусских солдат от удара копыт лошади.

В 1907 г. эти факты не знали ни Госсет, ни К. П., не знал о них и Bateman (1910). В 1915 г. было опровергнуто обвинение Борткевича в цензурировании данных, которое под влиянием Пирсона выдвинула Whitaker. Ред.

**12, § 4.4.** Борткевич (1898) заявил, что набор наблюдений из различных распределений Пуассона ведёт себя как выборка из единого такого же распределения и назвал это открытие законом малых чисел. См. Haight (1967), Stigler (1982), Seneta (1983) и Quine & Seneta (1987). Ред.

Борткевич посчитал, что ряд, составленный из независимых наблюдений с различными вероятностями появления редкого события, может считаться выборкой из единой совокупности, а точнее, что убывание коэффициента дисперсии к единице при убывании числа наблюдений и составляет закон малых чисел.

Перечисленные комментаторы описали закон малых чисел поверхностно. Брошюра Борткевича логически неудовлетворительна, да и понять его трудно. Так, его коэффициент дисперсии не совпадает с коэффициентом Лексиса, о чём он не сообщил. Несмотря на деликатную (и неопубликованную) критику Чупрова, Борткевич так и не признал своей неудачи.

В 1954 г. Колмогоров заявил, что Борткевич лишь применил предельную теорему Пуассона, и мы (2008а) доказали это утверждение, Теперь, однако, добавим, что уже Уитекер (Whitaker 1914) назвала свою статью *О законе малых чисел Пуассона* и что в письме Фишеру 30 декабря 1918 г. Госсет (см. § 4.4) повторил это выражение. О. Ш.

**13, § 4.4.** Борткевич (1915) обрушился и на Уитекер, и на *отрицательные биномы*, что можно объяснить тем, что он вообще не был математиком. На с. 256 он заявил, что его закон, *который полностью ориентирован на теорию Лексиса* (но с молчаливо изменённым коэффициентом дисперсии), *будет признаваться даже тогда, когда пирсоновы отрицательные биномы вполне заслуженно забудутся*.

В письме Чупрову 3 июля 1914 г. (Борткевич и Чупров 2005, с. 201) он назвал статью Уитекер *совсем дурацкой и характерной для чисто формального направления пирсоновской школы*. Но через несколько лет Чупров в письме А. А. Маркову 1916 г. (Ондар 1977, письмо № 80, с. 103) заявил, что возражения Борткевича против Уитекер беспочвенны, так как его математические выкладки *абсурдны*, а рассуждения неверны. В письме того же года № 69а (Шейнин 1990/2010, с. 110) Чупров указал, что примеры Борткевича, обосновывающие его закон малых чисел, недостаточны и малоудачны. Наконец, Чупров (1918 – 1919/1968, с. 217) положительно отозвался о методике Пирсон – Уитекер. Но вот Фишер, Торнтон и др. (1922, с. 330 прим.) заметили, что Уитекер пренебрегла вариациями между случайными выборками. О. Ш.

**14, § 4.4.** Госсет, как можно понять, принял, что вероятная ошибка учёта каждого элемента равна единице. Ср. Fourier (1829/1890, с. 569): полная ошибка в определении высоты пирамиды Хеопса равна произведению ошибки определения высоты её ступеньки на 14. Всего ступеней было 203 и  $\sqrt{203} = 14,2$ . О. Ш.

**15, § 4.4.** Пояснение:  $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$ ,  $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ . О. Ш.

**16, § 4.5.** Ethel Mary Elderton была сестрой актуария Уильяма Элдертона. Она успешно работала в лаборатории евгеники, см. *Who Was Who* и *Love* (1979). Ред.

**17, § 4.5.** В данном случае категории это однородные группы элементов в совокупности. О. Ш.

**18, § 4.5.** Кирстин Смит родилась в 1878 г. в небольшом городе на полуострове Ютландия и в 1903 г. окончила Копенгагенский университет по специальности математика. В 1903 – 1904 гг. она была личным секретарём Тиле и ассистентом в Международном бюро по исследованию моря в 1904 – 1915 гг. В 1915 – 1917 гг. она обучалась в Университетском колледже у Пирсона, защитила диссертацию в январе 1918 г. В 1918 – 1924 гг. работала в Копенгагене в Комитете морских исследований и в лаборатории Carlsberg, которую финансировали пивоварни. Свою карьеру она закончила как преподаватель. [...] Умерла в 1939 г. За эти сведения мы благодарны Андерсу Хальду.

Её письма К. Пирсону (см. его архив № 857/6) показывают, что при возвращении в Англию зимой 1916 г. она в основном проживала в Лейк-Дистрикт [в Озёрном крае в графстве Камбрия], потому что не могла переносить лондонский климат. В 1920 г. К. П. [безрезультатно, см. выше] предложил её перейти на работу к нему. Kiefer (1959) признал её заслуги в отыскании оптимальных оценок параметров. Ред.

**19, § 4.5.** Bennett (1983) опубликовал переписку Леонарда Дарвина с Фишером и снабдил её пояснениями. Ред.

**20, § 4.5.** Уместно сослаться на Бернштейна (1922, с. 17 – 18):

*Роль, аналогичную основному постулату механики – принципу инерции – играет закон, который можно назвать законом стационарности Дарвина. Если наличие у индивида определённого простого признака не увеличивает и не уменьшает его приспособленности к жизни (включая плодовитость и половой отбор), то процент индивидуумов, обладающих этим признаком, передаётся неизменным (в смысле теории вероятностей) из поколения в поколение.* О. Ш.

## Глава 5

Фишер (1950) опубликовал сборник своих статистических статей, которые посчитал наиболее выдающимися, а полное собрание его сочинений вышло в пяти томах (1971 – 1974). Существенным источником о его жизни и деятельности является книга Vox (1978), в которой описаны труды Фишера по статистике и эволюционной биологии. Наиболее тщательную рецензию на эту книгу написал, видимо, Kruskal (1980), который, впрочем, ограничился исследованием статистической деятельности Фишера. Из авторов других общих комментариев назовём Yates & Mather (1963), Savage (1976), Fienberg & Hinkley (1980) и MacKenzie (1981). Eisenhart (1979) и Vox (1981) исследовали разработку критерия  $t$  начиная с критерия  $z$  Стьюдента. E. Pearson (1968; 1974) рассмотрел некоторые стороны ранних работ Фишера, а Vox (1980) проследила его труды по планированию экспериментов 1922 – 1926 гг. Историю сельскохозяйственной науки (Russell 1966) можно дополнить обзорами Cochran (1976) о сравнительном экспериментировании и Gower (1988) о соотношении статистики и сельскохозяйственных исследований. Ред.

Добавим (Pfanzagl & Sheynin 1997), что распределение  $t$  впервые вывел немецкий математик Люрот. О. Ш.

**1, § 5.2.** О происходящей логической путанице см. Фишер (1922b, с. 311). См. также переписку Чупрова (Шейнин 1990/2010, § 15.3). В своей статье (1922, с. 259) он заметил, что К. Пирсон не сразу уловил отличие между теоретическим и выборочным значениями некоторых величин.

Здесь же укажем, что термин *эмпирическая выборка* (см. чуть ниже) не общепринят и не разъяснён редакторами. По смыслу он означает отбор элементов выборки по таблице случайных чисел. О. Ш.

**2, § 5.2.** В соответствии с Библиографией, Госсет опубликовал 6 статей в иных журналах. О. Ш.

**3, § 5.2.** Мы можем назвать *Tables for Statisticians and Biometricians*. London, 1914. Эти таблицы были переизданы в 1930 – 1931 гг. (часть 1-я вышла в те годы третьим изданием). О. Ш.

**4, § 5.2.** В своём предисловии Фишер (1925с) тепло признал, что при вычитке корректуры Госсет добавил замечания и исправил ошибки, однако форма выражения этого признания изменялась от издания к изданию.

**1-е издание, 1925 г.** *Больше, чем могу выразить, я обязан Госсету, Самерфильду и мисс Маккензи, которые вычитали корректуру, внесли полезные предложения и выправили много небольших, но неприятных ошибок.*

**9-е издание, 1944 г.** *Мои коллеги поощрили меня, и покойный Госсет (Стьюдент), его помощник Самерфильд и мисс Маккензи оказали мне высоко ценимую помощь при подготовке первого издания книги и выдержали неизбежную неприятную критику смелого предприятия.*

Раздел 5-й вначале состоял из математических таблиц, позднее же стал называться *Исторические замечания* с обзором трудов Госсета о точных выборочных распределениях.

**13-е издание, 1958 г.** *Работа Стьюдента не была быстро оценена (на неё вообще никак не откликнулись в том журнале, в котором она появилась). Одна из основных целей этой книги уже с её первого издания было расширение знаний о влиянии его исследований.*

Фразы в скобках в девятом издании не было, но других изменений [в приведенной выдержке] не оказалось. Заметим, что инициатива Стьюдента была отмечена в *Биометрике* и в содержании статьи Soper (1913), в заголовке статьи К. Пирсона (1915а) и в подзаголовке совместной статьи Soper et al (1917). Но 20 октября 1979 г. Э. Пирсон заявил:

*Насколько мне известно, [он] нигде не говорит скольким он, великий математик [очевидно Фишер] был обязан экспериментатору Стьюденту, который в свою очередь приобрёл свои знания от Бивена.* Ред.

**5, § 5.3.** На первое издание книги рецензию опубликовал Э. Пирсон в *Science Progress*. Harold Hotelling опубликовал рецензии на первые семь изданий книги Фишер (1925) в *J. Amer. Stat. Assoc.* Ред.

**6, § 5.4.1.** Если уж упоминать соотношение теории и эксперимента, то следовало бы более подробно остановиться на нём, см. Tguesdell (1984, с. 105 – 106). О. Ш.

**7, § 5.4.2.** Раннюю переписку Госсета, Фишера и К. Пирсона опубликовал Э. Пирсон (1968). Намного раньше он (1939) опубликовал одно письмо от Госсета 1936 г. и от него же Бивену 1923 г. О. Ш.

**8, § 5.4.3.** Ни русского названия, ни сути этого устаревшего метода мы не смогли найти, и здесь нам не помогло ценное справочное издание Dodge (2003). Но во всяком случае (см. также письмо Госсета 30 марта 1937 г. в § 6.7.1) seed drill это рядовая сеялка, но само слово drill может означать процесс высева вдоль борозды или просто борозду (более употребительно здесь слово furrow). Tine, видимо, сошник. Существует широкорядный метод посева, но может быть из восьми сошников работало только четыре. О. Ш.

**9, § 5.4.4.** С современной точки зрения дисперсионный анализ в форме, описанной в этой статье, не защищён от критики (Yates & Mather 1963; Cochran 1980). Принятая в ней схема должна была приводить к двум оценкам погрешности, которые, однако, были объединены. Навоз и поташ не рассматривались как отдельные факторы, а рандомизации не было. Ред.

**10, § 5.4.4.** До сих пор ещё не установлено в удовлетворительном виде, что именно составляет дисперсионный анализ (Speed 1987). Выявление его примеров в предшествующей литературе поэтому рискованно. До трудов Фишера непрерывной линии развития [этого анализа] не было, но некоторые успехи достойны упоминания. Эри (1861) описал модель, аналогичную модели с двумя составляющими дисперсии. С 1876 г. Лексис [см. Lexis (1879)] изучал устойчивость статистических рядов, и введенная им теория дисперсии превосходит анализ классификации по одному признаку (Heyde & Seneta 1977, § 3.4; Stigler 1986). В 1885 г. Эджуорт разрабатывал классификацию по двум признакам (Stigler 1978; 1986). С 1889 г. Тиле публиковал свои сочинения на датском языке; он исследовал общую форму классификации по двум признакам. В скверном английском переводе (1903) его книги о наблюдениях обсуждается только более простая модель (Hald 1981, § 7). В других

сочинениях подходящей средой для сильного развития и переноса (transplantation) оказались полевые сельскохозяйственные эксперименты. Ред.

**11, § 5.4.5.** Возможную опасность употребления сырого молока редакторы не упоминают. О. Ш.

**12, § 5.5.** Мы можем только привести английский текст.

The circle represents a wooden disc say 1' or 18" in diameter, to which a paper or cardboard cover can be attached by paste or preferably some system of clipping. It is free to revolve in a fixed frame, being pivoted on a central axis on which is also pivoted a transparent celluloid cursor. The whole screwed up with the necessary washers so that either disk or cursor can revolve without moving the other and will stay where it is left unless deliberately moved.

The fixed frame is made so as to form a level table with the disc and round the edge is the scale of  $y$ , the variable to be predicted (say)

$$y = a + bx + cx^2 + dz + k \log v + p \sin w.$$

Then setting a pointer on the edge of the disc to  $a$  on the scale you move the cursor to the zero of  $x$  on a suitable scale of  $x$  suitably placed on a circle concentric with the disc. Then you move the disc till the particular value of  $x$  comes under the cursor and so on. Finally the pointer shows you the answer on the  $y$  scale. The covers could have the circles printed on them and would only require scaling and when not in use could be kept in a gramophone record cabinet! О. Ш.

**13, § 5.5.** Мы можем только привести английский текст.

... a lecture diagram which is new to me and seems effective for its purpose. I wished to show how routine analyses are not random in time by putting spots on a time diagram with a straight line to show the mean. Not being a tidy draughtsman I funk'd putting 100 spots at 0.5" intervals by inking in circles but a brainwave told me to get black stickyback paper. It is used to edge photos and by selecting a cork borer of suitable size I found I could cut through three thicknesses of paper at a time and get perfect circles which I could stick on at leisure and which would come off if misplaced without leaving much mark. The straight line was cut off the paper with a photo trimmer and the short lengths pieced together. Quite successful. О. Ш.

**14, § 5.5.** Уравновешенные взгляды на спор Госсета и Фишера представили Yates & Mather (1963) и Cochran (1976). Вообще же результаты их дискуссии остаются неубедительными; некоторые экспериментаторы (Pearce 1983) продолжают рекомендовать рандомизацию, другие (Hurlbert 1984) всё ещё предпочитают систематические расположения. В качестве компромисса были предложены методы ограниченной рандомизации, которые исключают нежелательные схемы эксперимента (Bailey 1987). Были разработаны оптимальные планы экспериментов в предположении коррелированных погрешностей (Kunert 1985; Azzalini & Giovagnoli 1987). Ред.

**15, § 5.5.** Авдий: один из *малых* пророков. В *Ветхом завете* текст его *Книги* занял всего одну страницу, – меньше, чем книги остальных из них. О. Ш.

## Глава 6

**1, § 6.1.2.** W. W. Rouse Ball (1850 – 1925), математик и юрист. О. Ш.

**2, § 6.1.3.** Год издания должен был быть 1908, да и номер страницы также неверен. О. Ш.

**3, § 6.2.1.** Статью 1966 г. мы не смогли установить. О. Ш.

**4, § 6.2.1.** Госсет не случайно упомянул лодку, см. § 3.5. О. Ш.

**5, § 6.2.2.** Финансовое положение *Биометрики* было критическим, и Пирсон опасался, что публикация некоторых её таблиц другим автором уменьшит продажу *Таблиц для статистиков и биометристов*. Э. Пирсон

**6, § 6.3.2.** Описанный метод отбраковки наблюдений спорен. Если сомнительны несколько наблюдений, то это, возможно, свидетельствует о некоторой закономерности, да и вообще быть может следовало отбросить всю выборку. О. Ш.

**7, § 6.4.1.1.** Уместно упомянуть письмо Е. Е. Слуцкого Борткевичу 25 сентября 1923 г. (Виттих и др. 2007, с. 142). Он исследовал влияние *размера и формы телец, перетряхиваемых вместе* [совместно], [...] на *равновероятность всех комбинаций* при их извлечении из урны. Слуцкий, кроме того, рекомендовал применять в таких случаях *автоматическое саморегист-*



рирующее приспособление и даже схематически представил подобное устройство. Его схема не сохранилась. О. Ш.

8, § 6.4.1.2. Распределение  $t$  представляет собой частный случай кривой VII, ср. письмо Госсета 5 мая 1922 г. в § 5.2. О. Ш.

9, § 6.4.2. Здесь и несколько раз выше следовало сослаться на мемуар Гаусса (1823), см. Шейнин (2013, § 10A4). О. Ш.

10, § 6.4.2. Э. Пирсон (1939/1970, с. 396) указал, что это письмо не было опубликовано. О. Ш.

11, § 6.5.2. См. прим. 10 к гл. 2. О. Ш.

12, § 6.6.2. Имея в виду стиль писем Госсета, мы предположим, что в его обозначениях  $B = Black$  и  $W = White$ . О. Ш.

13, § 6.7.2. Этот анонимный ученик так и не появился в тексте. О. Ш.

14, § 6.7.2. Весьма неудачная фраза. О. Ш.

15, § 6.8. Это *нетрудное объяснение* осталось непонятным. О. Ш.

16, § 6.8. Инициалы Уилкса, S. S., как мы где-то прочли, шутливо воспринимались как *Statistician Supreme* (Верховный статистик). Его книга (Wilks 1962) переведена на русский язык. О. Ш.

17, § 6.8. О корреспондентах Госсета (кроме трёх основных) в книге сказано слишком мало. О. Ш.

18, § 6.8. Приведенные пункты не сформулированы в едином ключе и вообще плохо увязаны с предыдущим текстом, а в пункте 3 следовало бы указать, что термин количество информации ввёл Фишер (1935). О. Ш.

## Глава 7

1. Гаусса, стало быть, Госсет не читал, хоть его труды были уже переведены на французский и немецкий языки. О. Ш.

2. Об условиях наблюдения в геодезии редакторы явно ничего не знали. О. Ш.

3. В 1850 г. в одном из французских университетов была учреждена типично пуассоновская кафедра исчисления вероятностей и математической физики (Вгу 1981, с. 87), но мы сомневаемся, что даже в то время такое объединение было научно обосновано. Но пожалуй Госсет просто имел в виду математика-прикладника. О. Ш.

4. Об Эджуорте см. прил. 15 гл. 2. О. Ш.

5. Второе и окончательное обоснование метода наименьших квадратов (Гаусс 1823) никак не было связано с нормальным законом. О. Ш.

6. Пирсон (1931с) рассматривал статью Гельмерта (1876а), но не ознакомился с его основной в данном случае статьей (1876б). Гельмерт изучал распределение суммы квадратов погрешностей и вывел распределение  $\chi^2$ . О. Ш.

7. В 1908 г. Гальтон (Eisenhart 1978, с. 382, левый столбец) заявил, что *главные цели гауссова закона ошибок (!)* были *прямо противоположны* его целям: в теории ошибок стремились избавиться от погрешностей или учитывать их, он же пытался узнать о них. Непонятно, как можно было достичь заявленных целей теории ошибок, не понимая сути погрешностей. Во всяком случае, мы полагаем, что математическая обработка результатов измерений есть ветвь, пусть особая, статистики, или, если угодно, статистического метода. О. Ш.

8. Не удосужившись ознакомиться с сочинениями Гаусса, Фишер критиковал его. Гаусс был не только математиком, но и знатоком естествознания. Если он и пользовался своей знаменитой формулой для средней квадратической ошибки измерений (1823, § 38), притом без введения приведенного нами термина, то очень осторожно. Это усматривается из его полевых журналов, выдержки из которых опубликованы в его *Трудах*, и несомненно объясняется наличием систематических ошибок наблюдений (Шейнин 2007, § 5.4.1). Но кроме того Гаусс (1823, §§ 39 – 40) определил границы дисперсии наблюдений, хотя и допустил при этом ошибку в подсчёте. Её заметил Гельмерт (1876б), но методически неверно записал исправленные границы. В окончательном виде, не зная о Гельмерте, эти исправленные границы указали Колмогоров и др., см. Шейнин (2013, §§ 10A4-7 и 10A7-5).

9. Это критическое высказывание не очень убедительно. О. Ш.

10. Обычно более просто утверждается, что абсолютная погрешность наблюдения с равными вероятностями и больше, и меньше вероятной ошибки. О. Ш.

11. Грубая ошибка! Существует приближённое *правило трёх сигма*, – трёх средних квадратических (а не вероятных) ошибок. О. Ш.

12. Мы вставили в Библиографию *две статьи* 1933 г. этих авторов. О. Ш.

13. Что это за письмо? И где (см. ниже) указанное добавление? О. Ш.

14. Про этот музей нам ничего не известно. О. Ш.

15. Интерес к экономическим и социальным проблемам не раскрыт. В первую очередь следовало упомянуть книгу К. Пирсона (1978). О. Ш.

## Bibliography

### Abbreviations

- JASA** = *J. Amer. Stat. Assoc.*  
**Bk** = *Biometrika*  
**JRSS** = *J. Roy. Stat. Soc.*  
**Phil Mag** = *Lond., Edinb. and Dublin Phil. Mag.*  
**S, G** = [www.sheynin.de](http://www.sheynin.de) document No ... Also Google, Oscar Sheynin, Home (документ является либо оригинальным текстом, либо переводом)

- Бернштейн С. Н.** (1922), Математические проблемы современной биологии. *Наука на Украине*, т. 1, с. 13 – 20.
- Боголюбов А. Н. и Матвиевская Г. П.** (1997), *Всеволод Иванович Романовский, 1879 – 1954*. М.
- Борткевич В. И., Bortkiewicz L. von** (1898), *Das Gesetz der kleinen Zahlen*. Leipzig. **S, G**, 18.
- (1915), Realismus und Formalismus in der mathematischen Statistik. *Allg. stat. Arch.*, Bd. 9, pp. 225 – 256.
- Борткевич В. И., Чупров А.А.** (2005), *Переписка (1895 – 1926)*. Берлин. **S, G** 9.
- Витгих К., Раушер Г., Шейнин О. Б.** (2007), Переписка Е. Е. Слуцкого и В. И. Борткевича. *Финансы и Бизнес*, № 4, с. 139 – 154.
- Ондар Х. О., редактор** (1977), *О теории вероятностей и математической статистике. Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова*. М. Громадное число ошибок и искажений, см. Шейнин (1990/2010, с. 125 – 134). Там же дополнительные письма из той же переписки.
- Романовский В. И.** (1924), Теория вероятностей и статистика. По некоторым новейшим работам западных учёных. *Вестник статистики*, кн. 17, № 4/6, с. 1 – 38 (первая часть).
- (1927), Теория статистических констант. По некоторым работам Р. Э. Фишера. *Вестник статистики*, кн. 25, № 1, с. 224 – 266.
- (1928, англ.), О критерии принадлежности двух данных выборок к одной и той же нормальной совокупности. *Избр. тр.*, т. 2. Ташкент, 1964, с. 25 – 74.
- (1938), *Математическая статистика*. М. – Л.
- Советцание** (1948), *Второе всесоюзное совещание по математической статистике*. Ташкент.
- Чупров А. А.** (1909), *Очерки по теории статистики*. М., 1959.
- (1918 – 1919, нем.), К теории стабильности статистических рядов. В кн. Н. С. Четвериков, редактор, *О теории дисперсии*. М., с. 138 – 224.
- (1922), О математическом ожидании частного двух взаимозависимых случайных переменных. *Тр. русск. учёных за границей*, т. 1. Берлин, с. 240 – 271.
- Шейнин О. Б., Sheynin O.** (1979), Gauss and the theory of errors. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 20, pp. 21 – 72. **S, G**, 47.
- (1980), On the history of the statistical method in biology. *Ibidem*, vol. 22, pp. 323 – 371.
- (1982), On the history of medical statistics. *Ibidem*, vol. 26, pp. 241 – 286.
- (1984a), On the history of the statistical method in astronomy. *Ibidem*, vol. 29, pp. 151 – 199.
- (1984b), On the history of the statistical method in meteorology. *Ibidem*, vol. 31, pp. 53 – 95. **S, G**, 47.
- (1985), On the history of the statistical method in physics. *Ibidem*, vol. 33, pp. 351 – 382.
- (1986), Quetelet as a statistician. *Ibidem*, vol. 36, pp. 281 – 325.
- (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка*. М., 2010.
- (1995), Helmert's work in the theory of errors. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 49, pp. 73 – 104.
- (2001), Статистика и идеология в СССР. *Историко-математические исследования*, вып. 6 (41), с. 179 – 198.
- (2004), Fechner as a statistician. *Brit. J. Math. Stat., Psychology*, vol. 57, pp. 53 – 72.

- (2007), *История теории ошибок*. Берлин. **S, G**, 25.
- (2008a), Bortkiewicz' alleged discovery: the law of small numbers. *Hist. Scientiarum*, vol. 18, pp. 36 – 48.
- (2008b), Romanovsky's correspondence with K. Pearson and R. A. Fisher. *Archives Intern. d'Histoire des Sciences*, t. 58, No. 160 – 161, pp. 365 – 384. **S, G**, 67.
- (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G**, 11.
- Abbe E.** (1878), Über Blutkörper-Zählung. In (1989), *Ges. Abh.* Bd. 1. Jena, 1878, pp. 173 – 180; Hildesheim, 1989.
- Airy G. B.** (1850), An address delivered on presenting the honorary medal to Otto von Struve. *Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 19, pp. 271 – 283.
- (1861), *On the Algebraic and Numerical Theory of Errors and the Combination of Observations*. London, 1879.
- Adrain R.** (1809), Research concerning the probabilities of the errors ... in observations. In Stigler (1980, vol. 1). Дата 1808 ошибочна.
- Anderson O., Андерсон О.** (1914), Nochmals über *Elimination of spurious correlation* ... **Bk**, vol. 10, pp. 269 – 279. *Ausgewählte Schriften*, Bd. 1. Tübingen, 1963, pp. 1 – 11. Там же перепечатаны дальнейшие статьи автора на ту же тему. См. также Андерсон (1925). Библиографию Андерсона см. Шейнин (1990/2010, с. 233).
- (1925), О методе последовательных конечных разностей. В *Сб. статей, посвящённых П. Б. Струве*. Прага, с. 9 – 27. **S, G**, 48.
- Azzalini A. & Giovagnoli A.** (1987), Some optimal designs for repeated measurements and autoregressive errors. **Bk**, vol. 74, pp. 725 – 734.
- Bailey R. A.** (1987), Restricted randomization etc. **JASA**, vol. 82, pp. 712 – 719.
- Barnard G. A.** (1977), *Lecture Notes in Biomathematics*, vol. 18. Springer.
- Bartlett M. S.** (1978), Fisher. In Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 352 – 358), **S, G**, 61.
- (1981), Egon Sharpe Pearson, 1895 – 1980. *Biogr. Mem. Fellows Roy. Soc.*, vol. 27, pp. 425 – 443.
- Bartlett M. S. & Tippett L. H. C.** (1981), Egon Sharpe Pearson, 1895 – 1980. **Bk**, vol. 68, pp. 1 – 12.
- Bartlett S.** (1931), Nutritional value of raw and pasteurized milk. *J. Min. Agriculture*, vol. 38, pp. 60 – 64.
- Bateman H.** (1910), Note on the probability distribution of  $\alpha$ -particles. **Phil Mag**, ser. 6, vol. 20, pp. 704 – 707.
- Bennet J. H., Editor** (1983), *Natural Selection, Heredity and Eugenics. Including Sel. Corr. of R. A. Fisher with L. Darwin and Others*. Oxford.
- Blakeman J. & Pearson K.** (1906), On the probable error of mean-square contingency. **Bk**, vol. 5, pp. 191 – 197.
- Boland P. J.** (1984), Biographical glimpse of W. S. Gosset. *Amer. Statistician*, vol. 38, pp. 179 – 183.
- Boole G.** (1854), *Investigation of the Laws of Thought* etc. New York, 1958.
- Box Joan Fisher** (1978), *R. A. Fisher: The Life of a Scientist*. New York.
- (1980), R. A. Fisher and the design of experiments, 1922 – 1926. *Amer. Statistician*, vol. 34, pp. 1 – 7.
- (1981), Gosset, Fisher and the *t* distribution. *Amer. Statistician*, vol. 35, pp. 61 – 66.
- (1987), Guinness, Gosset, Fisher and small samples. *Stat. Sci.*, vol. 2, pp. 45 – 52.
- Bru B.** (1981), Poisson, le calcul des probabilités et l'instruction publique. In Métivier M. et al, Editors, *S.-D. Poisson et la science de son temps*. Palaiseau, pp. 51 – 94. **S, G**, 15.
- Bruns H.** (1906), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre*. Berlin.
- Burnside W.** (1924), On Bayes' formula. **Bk**, vol. 16, p. 189.
- Burrau C.** (1929), T. N. Tiele. *Nordic Stat. J.*, vol. 1, pp. 340 – 348. **S, G**, 44.
- Cave B. M. & Pearson K.** (1914), Numerical illustrations of the variate difference correlation method. **Bk**, vol. 10, pp. 340 – 355.
- Cave-Brown-Cave F. E.** (1904), On the influence of the time factor on the correlation between the barometric heights at stations etc. *Proc. Roy. Soc.*, vol. A74, pp. 403 – 413.

- Chauvenet W.** (1863), *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, vols 1 – 2. New York, 1960.
- Cheshire L., Oldis E. & Pearson E. S.** (1932), Further experiments on the sampling distributions of the correlation coefficient. *JASA*, vol. 27, pp. 121 – 128.
- Church A. E. R.** (1925), On the moments of the distributions of squared standard deviations etc. *Bk*, vol. 17, pp. 79 – 83.
- (1926), On the means and squared standard deviations of small samples etc. *Bk*, vol. 18, pp. 321 – 394; vol. 24, p. 292.
- Cochran W. G.** (1976), Early development of techniques in comparative experimentation. In: D. B. Owen, Editor, *On the History of Stat. and Probability*, pp. 1 – 25. New York.
- (1980), Fisher and the analysis of variance. In: S. E. Fienberg & D. V. Hinkley, Editors, *R. A. Fisher: Appreciation*, pp. 17 – 34. New York.
- Cournot A. A., Курно О.** (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей*. М., 1970.
- Cullen M. J.** (1975), *Statistical Movement in Early Victorian Britain* etc. Hassocks, Sussex.
- Cunliffe S. V.** (1976), Interaction. *JRSS*, vol. A139, pp. 1 – 19.
- David H. A.** (1981), In memoriam: Egon S. Pearson, 1895 – 1980. *Amer. Statistician*, vol. 35, pp. 94 – 95.
- De Morgan A.** (1837), Theory of probabilities. *Enc. Metropolitana*, vol. 2, pp. 359 – 458; pp. 393 – 490 in 2<sup>nd</sup> edition of 1845.
- (1838), *Essay on Probabilities and on Their Application to Life Contingencies and Insurance Offices*. Lardner's Cabinet Enc. London.
- (1847), *Formal Logic* etc. London.
- (1864), On the theory of errors of observation. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 10, pp. 409 – 427. Краткий обзор: **S, G**, 19.
- De Morgan Sophia Elizabeth** (1882), *Memoir of Augustus De Morgan*. London.
- Dobzhansky T. G.** (1937), *Genetics and the Origin of Species*. New York, 1941, 1951.
- Dodge Y.** (2003), *Oxford Dictionary of Statistical Terms*. Oxford.
- Donkin W. F.** (1857), On an analogy relating to the theory of probabilities and on the principle of the method of least squares. *Q. J. Pure and Applied Math.*, vol. 1, pp. 152 – 162.
- Eden T. & Fisher R. A.** (1924), Experiments on the response of potato to potash and nitrogen. *J. Agric. Sci.*, vol. 14, pp. 201 – 213.
- (1927), Experimental determination of the value of top dressings with cereals. *Ibidem*, vol. 17, pp. 548 – 562.
- Eden T. & Yates F.** (1933), On the validity of Fisher's z-test when applied to an actual sample of non-normal data. *Ibidem*, vol. 23, pp. 6 – 17.
- Edgeworth F. Y.** (1884), Philosophy of chance. *Mind*, vol. 9, pp. 223 – 235. In 1996, vol. 1, pp. 6 – 18.
- (1885), Methods of statistics. *Jubilee Vol. Stat. Soc.*, pp. 181 – 217. In 1996, vol. 2, pp. 24 – 60.
- (1897), Miscellaneous applications of the calculus of probabilities. *JRSS*, vol. 60, pp. 681 – 698. In 1996, vol. 3, pp. 108 – 149.
- (1907), Statistical observations on wasps and bees. *Bk*, vol. 5, 365 – 386. In 1996, vol. 3, pp. 332 – 353.
- (1996), *Writings in Probability, Statistics and Economics*, vols 1 – 3. Cheltenham. Editor, C. R. McCann, Jr.
- Edwards A. W. F.** (1974), History of likelihood. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 42, pp. 9 – 15.
- Eisenhart C.** (1974), Pearson. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 10, pp. 447 – 473.
- (1978), Gauss. In Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 378 – 386), **S, G**, 61.
- (1979), On the transition from *Student's z* to *Student's t*. *Amer. Statistician*, vol. 33, pp. 6 – 10.
- Elderton E. M.** (1933), The Lanarkshire milk experiment. *Ann. Eugen.*, vol. 5, pp. 326 – 336, 337 – 338.
- Elderton E. M. & Pearon K.** (1907), On the measure of resemblance of first cousins. *Eugenics Lab. Mem.* IV.
- (1910), A first study of the influence of parental alcoholism on the physique and ability of the offspring. *Eugenics Lab. Mem.* X.

- Elderton W. P.** (1902), Tables for testing the goodness of fit of theory to observation. **Bk**, vol. 1, pp. 155 – 163.
- Ellis R. L.** (1844), On the method of least squares. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 8, pp. 204 – 219. Reprinted: Ellis (1863, pp. 12 – 37).
- (1850), Remarks on an alleged proof of the *method of least squares* etc. **Phil Mag**, ser. 3, vol. 37, pp. 321 – 328, 462. Reprinted: Ellis (1863, pp. 53 – 61).
- (1863), *Mathematical and Other Writings*. Cambridge.
- Fechner G. T.** (1897), *Kollektivmasslehre*. Leipzig.
- Fienberg S. E. & Hinkley D. V., Editors** (1980), *R. A. Fisher: an Appreciation*. New York.
- Fisher R. A.** (1912), On an absolute criterion for fitting frequency curves. *Messenger Math.*, ser. 2, vol. 41, pp. 155 – 160.
- (1915), Frequency distribution of the values of the correlation coefficient etc. **Bk**, vol. 10, pp. 507 – 521.
- (1916), *Biometrika*. *Eugen. Rev.*, vol. 8, pp. 62 – 64.
- (1918 – 1919), Correlation between relatives on the supposition of Mendelian inheritance. *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, vol. 52, pp. 399 – 434.
- (1920), Mathematical examination of the methods of determining the accuracy of an observation etc. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. 80, pp. 758 – 770.
- (1921), On the probable error of a coefficient of correlation etc. *Metron*, t. 1, pp. 1 – 32.
- (1922a), On the interpretation of  $\chi^2$  from contingency tables etc. **JRSS**, vol. 85, pp. 87 – 94.
- (1922b), Mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A222, pp. 309 – 368.
- (1922c), Goodness of fit of regression formulae etc. **JRSS**, vol. 85, pp. 597 – 612.
- (1924a), Conditions under which  $\chi^2$  measures the discrepancy between observation and hypothesis. **JRSS**, vol. 87, pp. 442 – 450.
- (1924b), Influence of rainfall on the yield of wheat at Rothamsted. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. B213, pp. 89 – 142.
- (1925a), Applications of *Student's* distribution. *Metron*, t. 5, pp. 90 – 104.
- (1925b), Expansion of *Student's* integral in powers of  $n^{-1}$ . *Ibidem*, pp. 109 – 120.
- (1925c), *Statistical Methods for Research Workers*. См. Fisher (1990).  
Перевод: *Статистические методы для исследователей*. М., 1958.
- (1926), The arrangements of field experiments. *J. Min. Agric.*, vol. 33, pp. 503 – 513.
- (1928a), On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics. *Proc. Intern. Math. Congr. Toronto 1924*, vol. 2, pp. 805 – 813.
- (1928b), The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient. *Proc. Roy. Soc.*, vol. A121, pp. 654 – 673.
- (1931), Evolution of dominance. *Biol. Rev.*, vol. 6, pp. 345 – 368.
- (1932), The bearing of genetics on theories of evolution. *Science Progr.*, vol. 27, pp. 273 – 287.
- (1933), Number of Mendelian factors in qualitative inheritance. *Nature*, vol. 131, pp. 400 – 401.
- (1939), “Student”. *Annals of Eugenics*, vol. 9, pp. 1 – 9.
- (1950), *Contributions to Mathematical Statistics*. Index: J. Tukey. New York.
- (1951), Statistics. In *Scient. Thought in the 20<sup>th</sup> Century*. Editor A. E. Heath. London, pp. 31 – 55.
- (1956), *Statistical Methods and Statistical Inference*. См. Fisher (1990).
- (1971 – 1974), *Collected Papers.*, vols 1 – 5. Adelaide.
- (1990), *Statistical Methods, Experimental Design and Scientific Inference*. Oxford. Сборник из трёх книг с отдельными пагинациями. *Statistical Methods*: 14 издания в 1925 – 1973 гг.; *Experimental Design*: восемь изданий в 1935 – 1971 гг.; *Scientific Inference*: три издания в 1956 – 1973 гг.
- Fisher R. A. & Barbacki S.** (1936), Test of the supposed precision of systematic arrangement. *Ann. Eugen.*, vol. 7, pp. 189 – 193.
- Fisher R. A. & Bartlett S.** (1931), Pasteurised and raw milk. *Nature*, vol. 127, pp. 591 – 592.

- Fisher R. A. & Mackenzie W. A.** (1923), Manurial response of different potato varieties. *J. Agric. Sci.*, vol. 13, pp. 311 – 320.
- Fisher R. A., Thornton H. G. & Mackenzie W. A.** (1922), The accuracy of the plating method etc. *Annals of Appl. Biol.*, vol. 9, pp. 325 – 359.
- Fisher R. A. & Yates F.** (1938), *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*. London, 1974.
- Forsyth A. R.** (1929), James Whitbread Lee Glaisher. *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 4, pp. 101 – 112.
- Fourier J. B. J.** (1829), Second mémoire sur les résultats moyens etc. *Euvr.*, t. 2. Paris, 1890, pp. 551 – 590.
- Galloway T.** (1839), *Treatise on Probability*. Edinburgh.
- (1846), On the application of the method of least squares etc. *Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 15, pp. 23 – 69.
- Galton F.** (1889), *Natural Inheritance*. London.
- (1902), The most suitable proportion between the values of first and second prizes. **Bk**, vol. 1, pp. 385 – 390.
- Gauss C. F.** (1809, латин.), Теория движения небесных тел, кн. 2, раздел 3. Гаусс (1957, с. 89 – 109).
- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.
- (1823, латин.), Теория комбинации наблюдений. Там же, с. 17 – 57.
- (1957), *Избр. геод. соч.*, т. 1. М. Ред., Г. В. Багратуни.
- Glaisher J. W. L.** (1872), On the law of facility of errors of observations etc. *Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 39, pp. 75 – 123.
- Gosset W. S.** (1907), On the error of counting with a haemocytometer. **Bk**, vol. 5, pp. 351 – 360.
- (1908a), The probable error of a mean. **Bk**, vol. 6, pp. 1 – 25.
- (1908b), On the probable error of the correlation coefficient. **Bk**, vol. 6, pp. 302 – 310.
- (1909), The distribution of the means of samples etc. **Bk**, vol. 7, pp. 210 – 214.
- (1911), Appendix to Mercer & Hall (1911). *J. Agric. Sci.*, vol. 4, p. 128.
- (1914), Elimination of spurious correlation etc. **Bk**, vol. 10, pp. 179 – 180.
- (1917), Tables for estimating the probability that the mean of a unique sample ... lies etc. **Bk**, vol. 11, pp. 414 – 417.
- (1919), Explanation of deviations from Poisson's law in practice. **Bk**, vol. 12, pp. 211 – 215.
- (1921), Experimental determination of the probable error of Spearman's correlation coefficients. **Bk**, vol. 13, pp. 263 – 282.
- (1923), On testing varieties of cereals. **Bk**, vol. 15, pp. 271 – 293; vol. 16, p. 411.
- (1925), New tables for testing the significance of observations. *Metron*, ser. 3, vol. 5, pp. 105 – 108, 113 – 120.
- (1926), R. A. Fisher (1925c). *Eugenics Rev.*, 18, pp. 148 – 150.
- (1927), Errors of routine analysis. **Bk**, vol. 19, pp. 151 – 164.
- (1929), Рецензия: Kuczynski (1928, vol. 1). *Eugen. Rev.*, vol. 21, pp. 30 – 31.
- (1931a), The Lanarkshire milk experiment. **Bk**, vol. 23, pp. 398 – 406.
- (1931b), On the  $z$  test. *Ibidem*, pp. 407 – 408.
- (1933), Evolution by selection etc. *Eugen. Rev.*, vol. 24, pp. 293 –
- (1934), Calculation of the minimum number of genes in Winter's selection experiment. *Ann. Eugen.*, vol. 6, pp. 77 – 82.
- (1938), Comparison between balanced and random arrangements of field plots. **Bk**, vol. 29, pp. 363 – 379.
- (1942), *Collected Papers*. Editors E. S. Pearson, J. Wishart. Cambridge, 1958.
- (1967), *Letters from W. S. Gosset to R. A. Fisher, 1915 – 1936*. Dublin.
- Gower J. C.** (1988), Statistics and agriculture. **JRSS**, vol. A151, pp. 179 – 200.
- Greenwood M.** (1931), Herbert Edward Soper. **JRSS**, vol. 94, pp. 135 – 143.
- Greenwood M. & White J. D. C.** (1909), Biometric study of phagocytosis etc. **Bk**, vol. 6, pp. 376 – 401.
- (1910), Same paper continued. **Bk**, vol. 7, pp. 505 – 530.
- Greenwood M. & Yule G. U.** (1920), Inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings etc. **JRSS**, vol. 83, pp. 255 – 279.
- Haight F. A.** (1967), *Handbook of the Poisson Distribution*. New York.

- Hald A.** (1981), T. N. Thiele's contributions to statistics. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 49, pp. 1 – 20.
- Halsey A. H. & Trow M. A.** (1971), *The British Academics*. London.
- Harvey G.** (1822), On the method of minimum squares. *Edinb. Phil. J.*, vol. 7, pp. 292 – 301.
- Helmert F. R.** (1876a), Die Genauigkeit der Formel von Peters etc. *Astron. Nachr.*, Bd. 88, pp. 113 – 132.
- (1876b), Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler etc. *Z. Math. Phys.*, Bd. 21, pp. 192 – 218.
- Herschel J.** (1850), Quetelet on probabilities. *Edinburgh Rev.*, vol. 92, pp. 1 – 57.
- (1857), *Essays* etc. London.
- Heyde C. C. & Seneta E.** (1977), *I. J. Bienaymé*. New York.
- Hooker R. H.** (1901a), Correlation of the marriage rate with trade. *JRSS*, vol. 64, pp. 485 – 492.
- (1901b), The suspension of the Berlin Produce Exchange and its effect on corn prices. *Ibidem*, pp. 574 – 613.
- (1905), On the correlation of successive observations etc. *Ibidem*, vol. 68, pp. 696 – 703.
- Hurlbert S. H.** (1984), Pseudoreplication and the design of ecological field experiments. *Ecological Monogr.*, vol. 54, pp. 187 – 211.
- Irwin J. O.** (1925a), The further theory of Galton's individual difference problem. *Bk*, vol. 17, pp. 100 – 128.
- (1925b), On a criterion for the rejection of outlying observations. *Ibidem*, pp. 238 – 250.
- (1978), Gosset. In Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 409 – 413).
- Ivory J.** (1825 – 1826), On the method of least squares. *Phil Mag*, vol. 65, pp. 3 – 10, 81 – 88, 161 – 168; vol. 68, pp. 161 – 165.
- Jevons W. S., Джевонс У. С.** (1874), *Principles of Science*. London, 1877. *Основы науки*. СПб, 1881.
- Johnson N. L.** (1981), E. S. Pearson. *JRSS*, vol. A144, pp. 270 – 271.
- Johnston J. F. W.** (1849), *Experimental Agriculture* etc. Edinburgh.
- Kendall M. G.** (1952), G. U. Yule, 1871 – 1951. *JRSS*, vol. A115, pp. 156 – 161. Reprint: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 419 – 425). *S, G*, 51.
- Kevles D. J.** (1985), *In the Name of Eugenics*. New York.
- Kiefer J.** (1959), Optimal experimental designs. *JRSS*, vol. B21, pp. 272 – 319.
- Kruskal W.** (1980), Рецензия: Вох (1978). *JASA*, vol. 75, pp. 1019 – 1030.
- Kruskal W. & Tanur J. M., Editors** (1978), *Intern. Enc. of Statistics*, vols 1 – 2. New York.
- Kuczynski R. R.** (1928), *The Balance of Births and Deaths*.
- Kunert J.** (1985), Optimal experimental designs when the errors are assumed to be correlated. *Stat. and Decisions*, Suppl. Issue No. 2, pp. 287 – 298.
- Laplace P. S.** (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Œuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.
- (1810), Sur les approximations des formules etc. *Ibidem*, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345, 349 – 353.
- (1811), Sur les intégrales définies etc. *Ibidem*, pp. 357 – 412.
- (1812), *Théorie analytique des probabilités*. *Ibidem*, t. 7. Paris, 1886.
- (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В Ю. В. Прохоров, редактор, *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.
- Leighton G. & McKinlay P. L.** (1930), *Milk Consumption and the Growth of Schoolchildren*.
- Levasseur E. L.** (1885), *La statistique graphique. Jubilee Vol. London Stat. Soc.*, pp. 218 – 250.
- Lexis W., Лексис В.** (1879, нем.), О теории стабильности статистических рядов. В книге Н. С. Четвериков, редактор, *О теории дисперсии*. М., 1970, с. 5 – 38.
- Love R.** (1979), *Alice in eugenics-land: feminism and eugenics in the scientific careers of Alice Lee and Ethel Elderton*. *Annals of Sci.*, vol. 36, pp. 145 – 158.
- Lubbock J. W. & Drinkwater-Bethune J. E.** (1830), *On Probability*. London.
- Lupton S.** (1898), *Notes on Observations*. London.
- MacKenzie D. A.** (1981), *Statistics in Britain, 1865 – 1930*. Edinburgh.



- McMullen L.** (1939), W. S. Gosset. *Student as a man*. **Bk**, vol. 30, pp. 205 – 210. Reprint: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 354 – 360).
- Mairesse J., Editor** (1989), Statistical Methodology in Europe, 1789 – 1889. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, vol. 53, No. 1, pp. 119 – 176.
- Marey E. J.** (1878), *La méthode graphique dans les sciences expérimentales* etc. Paris, 1885.
- Mayr E. & Provine W. B., Editors** (1980), *The Evolutionary Synthesis*.
- Mercer W. B. & Hall A. D.** (1911), Experimental error of field trials. *J. Agric. Sci.*, vol. 4, pp. 107 – 127.
- Merriman M.** (1884), *Textbook on the Method of Least Squares*. New York, 1911.
- (1877), *List of Writings Relating to the Method of Least Squares*. Reprint: Stigler (1980, vol. 1).
- Merrington M. et al** (1983), *List of Papers and Correspondence of K. Pearson* etc. Univ. College London.
- Moore P. G.** (1975), Tribute to E. S. Pearson. **JRSS**, vol. A138, pp. 129 – 130.
- Morant G. M. & Welch D. L.** (1939), *Bibliography of Statistical and Other Writings of K. Pearson*. Cambridge.
- Neumann B. H.** (1984), Augustus De Morgan. *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 16, pp. 575 – 589.
- Newcomb S.** (1860), Notes on the theory of probabilities. *Math. Monthly*, vol. 2, pp. 134 – 140. Reprint: Stigler (1980, vol. 2).
- Neyman J. & Pearson E. S.** (1928), On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. **Bk**, vol. 20A, pp. 175 – 240, 263 – 294.
- (1933a), On the testing of statistical hypotheses in relation to probabilities a priori. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 29, pp. 492 – 510.
- (1933b), On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A231, pp. 289 – 337.
- Norton B. J.** (1978), K. Pearson and statistics: The social origins of scientific innovations. *Soc. Studies of Sci.*, vol. 8, pp. 3 – 34.
- Pearce S. C.** (1983), *The Agricultural Field Experiment*. New York.
- Pearson E. S.** (1922), On the variations in personal equation and correlation of successive judgements. **Bk**, vol. 14, pp. 23 – 102.
- (1923a), The probable error of a class index correlation. **Bk**, vol. 14, pp. 261 – 280.
- (1923b), Natural selection and the age and area theory of J. C. Willis. **Bk**, vol. 15, pp. 89 – 108.
- (1924), Note on the approximation to the probable error of a coefficient of correlation. **Bk**, vol. 16, pp. 196 – 198.
- (1925), Bayes' theorem examined in the light of experimental sampling. **Bk**, vol. 17, pp. 388 – 442.
- (1926a), Further note on the distribution of range in samples taken from a normal distribution. **Bk**, vol. 18, pp. 173 – 194.
- (1926b), Рецензия: Fisher (1925c). *Science Progr.*, vol. 20, pp. 733 – 734.
- (1927a), Application of the theory of differential equations to the solution of problems connected with interdependence of species. **Bk**, vol. 19, pp. 216 – 222.
- (1927b), Further note on the linear correlation ratio. **Bk**, vol. 19, pp. 223 – 224.
- (1929), Some notes on sampling tests with two variables. **Bk**, vol. 21, pp. 337 – 360.
- (1931a), Analysis of variance in cases of non-normal variation. **Bk**, vol. 23, pp. 114 – 133.
- (1931 – 1932), The test of significance for the correlation coefficient. **JASA**, vol. 26, pp. 128 – 134; vol. 27, pp. 424 – 426.
- (1932), The percentage limits for the distribution of range in samples from a normal distribution etc. **Bk**, vol. 24, pp. 404 – 417.
- (1937), Some aspects of the problem of randomization. **Bk**, vol. 29, pp. 53 – 64.
- (1938), *Karl Pearson: an Appreciation of Some Aspects of His Life and Work*. Cambridge.
- (1939), W. S. Gosset, 1876 – 1937, *Student as a statistician*. **Bk**, vol. 30, pp. 210 – 250. Reprint: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 360 – 403).
- (1955), **JRSS**, vol. B17, pp. 204.

- (1965), Some incidents in the early history of biometry and statistics, 1890 – 1894. **Bk**, vol. 52, pp. 3 – 18. Reprint: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 323 – 338).
- (1968), Some early correspondence between Gosset, Fisher and K. Pearson. **Bk**, vol. 55, pp. 445 – 457. Reprint: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 405 – 417).
- (1974), Memories of the impact of Fisher's work in the 1920s. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 42, pp. 5 – 8.
- Pearson E. S. & Adyanthaya N. K.** (1928), Distribution of frequency constants in small samples from symmetrical populations. **Bk**, vol. 20A, pp. 356 – 360.
- (1929), Distribution of frequency constants in small samples from non-normal symmetrical and skew populations. **Bk**, vol. 21, pp. 259 – 286.
- Pearson E. S. & Hartley H. O.** (1943), Tables of the probability integral of the studentized range. **Bk**, vol. 33, pp. 89 – 99.
- Pearson E. S. & Kendall M. G., Editors** (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London.
- Pearson E. S. & Pearson K.** (1922), On polychoric coefficients of correlation. **Bk**, vol. 14, pp. 127 – 156.
- Pearson E. S. & Please N. W.** (1975), Relation between the shape of the population distribution and the robustness of four simple test statistics. **Bk**, vol. 62, pp. 223 – 241.
- Pearson K.** (1900), On a criterion etc. **Phil Mag**, ser. 5, vol. 50, pp. 157 – 175.
- (1903), On the influence of natural selection on the variability and correlation of organs. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A200, pp. 1 – 66.
- (1907), On further methods on determining correlation. *Drapers' Co. Res. Mem. Biometric Ser.*, IV.
- (1914), On certain errors with regard to multiple correlation occasionally made by those who have not adequately studied the subject. **Bk**, vol. 10, pp. 181 – 187.
- (1915a), On the distributions of the standard deviations of small samples. **Bk**, vol. 10, pp. 522 – 529.
- (1915b), On certain types of compound distributions etc. **Bk**, vol. 11, pp. 139 – 144.
- (1920), The fundamental problem of practical statistics. **Bk**, vol. 13, pp. 1 – 6.
- (1921), Note on the *Fundamental problem of practical statistics*. Ibidem, pp. 300 – 301.
- (1924a), Note on Bayes' theorem. **Bk**, vol. 16, pp. 190 – 193.
- (1924b), On the difference and the doublet tests etc. Ibidem, pp. 244 – 252.
- (1931a), On the nature of the relationship between two of *Student's* variates, ( $z_1$  and  $z_2$ ) etc. **Bk**, vol. 22, pp. 405 – 422.
- (1931b), Further remarks on the  $z$  test. **Bk**, vol. 23, pp. 408 – 415.
- (1931c), Historical note on the distribution of the standard deviations of samples etc. Ibidem, pp. 416 – 418.
- (1941), The laws of chance in relation to thought and conduct etc. **Bk**, vol. 32, pp. 89 – 100.
- (1948), *Early Statistical Papers*. Cambridge, 1956.
- (1978), *History of Statistics in the 17<sup>th</sup> and 18<sup>th</sup> Centuries* etc. Editor E. S. Pearson. London. Отдельные места: **S, G**, 63.
- Pearson K. & Filon L. N. G.** (1898), On the probable errors of frequency constants etc. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A191, pp. 229 – 311. Reprint: K. Pearson (1948, pp. 179 – 261).
- Peirce B.** (1852), Criterion for the rejection of doubtful observations. *Astron. J.*, vol. 2, pp. 161 – 163. Reprint: Stigler (1980, vol. 2).
- Persons W. M.** (1917), On the variate difference correlation method etc. *Q. Publ. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 15, p. 602.
- Peters C. A. F.** (1856), Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers etc. *Astron. Nachr.*, Bd. 44, No. 1034, pp. 29 – 32.
- Pfanzagl J. & Sheynin O.** (1997), Lüroth. S. Kotz & N. L. Johnson, Editors, *Enc. of Stat. Sciences*, vol. 7, 2006, pp. 4433 – 4434 in vol. 7. Hoboken, New Jersey.
- Poisson S.-D., Пуассон С. Д.** (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements* etc. Paris, 2003. *Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах*. Берлин, 2013. **S, G**, 52.
- Porter T. M.** (1986), *The Rise of Statistical Thinking 1820 – 1900*. Princeton. Наша крайне отрицательная рецензия: *Centaurus*, vol. 31, 1988, pp. 171 – 172.

- Quetelet A.** (1846), *Lettres ... sur la théorie des probabilités* etc. Bruxelles.
- Quine M. P. & Seneta E.** (1987), Bortkiewicz' data and the law of small numbers. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 55, pp. 173 – 181.
- Reid C.** (1982), *Neyman – from Life*. New York.
- Rhodes E. C.** (1924), On the problem whether two given samples can be supposed to be drawn from the same population. **Bk**, vol. 16, pp. 239 – 248.
- Rider P. P.** (1930), Survey of the theory of small samples. *Annals Math.*, ser. 2, vol. 31, pp. 577 – 628.
- Russell Sir E. John** (1966), *History of Cultural Science in Great Britain 1620 – 1954*. London.
- Savage L. J.** (1976), On rereading R. A. Fisher. *Annals of Stat.*, vol. 4, pp. 441 – 500.
- Seneta E.** (1983), Modern probabilistic concepts in the work of E. Abbe and A. De Moivre. *Math. Scientist*, vol. 8, pp. 75 – 80.
- Sheppard N. F., Aitken A. C. & Fisher R. A.** (1937), W. F. Sheppard. *Annals of Eugenics*, vol. 8, pp. 1 – 14.
- Sheppard W. F.** (1898), On the geometrical treatment of the *normal curve* of statistics etc. *Proc. Roy. Soc.*, vol. 62, pp. 170 – 173.
- Shewhart W. A.** (1931), *Economic Control of Quality in Manufactured Product*. Milwaukee, Wis., 1980.
- Shewhart W. A. & Winters F. W.** (1928), Small samples, new experimental results. *JASA*, vol. 23, pp. 144 – 153.
- Smith K.** (1916), On the *best* values of the constants in frequency distributions. **Bk**, vol. 11, pp. 262 – 276.
- (1918), On the standard deviations of adjusted and interpolated values of an observed polynomial function etc. **Bk**, vol. 12, pp. 1 – 85.
- Soper H. E.** (1913), On the probable error of the correlation coefficient etc. **Bk**, vol. 9, pp. 91 – 115.
- (1914), Tables of Poisson's exponential binomial limit. **Bk**, vol. 10, vol. 25 – 35.
- Soper H. E., Young A. W., Cave B. M., Lee A. & Pearson K.** (1917), On the distribution of the correlation coefficient in small samples. **Bk**, vol. 11, pp. 328 – 413.
- Sophister** (1928), Discussion of small samples drawn from an infinite skew population. **Bk**, vol 20A, pp. 389 – 423.
- Spearman C.** (1904), The proof and measurement of association etc. *Amer. J. Psychology*, vol. 15, pp. 72 – 101.
- Speed T. P.** (1987), What is an analysis of variance? *Annals Stat.*, vol. 15, pp. 885 – 941.
- Stigler S. M.** (1978), F. Y. Edgeworth, statistician. *JRSS*, vol. A141, pp. 287 – 322.
- , Editor (1980), *Amer. Contr. to Math. Statistics in the 19<sup>th</sup> Century*, vols 1 – 2. New York.
- (1982), Poisson on the Poisson distribution. *Stat. and Prob. Letters*, vol. 1, pp. 33 – 35.
- (1986), *The (!) History of Statistics*. Cambridge (Mass.).
- Thiele T. N.** (1903), *Theory of Observations*. London.
- Tintner G.** (1940), *The Variate-Difference Method*. Bloomington, Indiana.
- Tippett L. H. C.** (1925), On the extreme individuals and the range of samples etc. **Bk**, vol. 17, pp. 364 – 387.
- (1927), Random sampling numbers. *Tracts for Computers* No. 15.
- Tolley H. R.** (1929), Economic data from the sampling point of view. *JASA*, vol. 24, Suppl. pp. 69 – 72.
- Truesdell C.** (1984), *An Idiot's Fugitive essays on Science*. New York. Отрывки: **S, G**, 48. Слово *идиот* в первоначальном смысле означало *частного лица, обычного человека без определённого положения, не профессионала* (автор).
- Venn J.** (1866), *Logic of Chance*. London, 1888. New York, 1962.
- Venn J. A.** (1953), *Alumni Cantabrigienses*. Cambridge.
- Welch B. L.** (1937), On the *z* test in randomized blocks and Latin squares. **Bk**, vol. 29, pp. 21 – 52.
- (1958), *Student* and small sample theory. *JASA*, vol. 53, pp. 777 – 788.
- Westergaard H.** (1890), *Grundzüge der Theorie der Statistik*. Jena, 1928. Небольшая часть: **S, G**, 51.

- Whitaker L.** (1914), On the Poisson law of small numbers. **Bk**, vol. 10, pp. 36 – 71.
- Whittaker E. T. & Robinson G., Уиттекер Э., Робинсон Г.** (1924, англ.). *Математическая обработка результатов наблюдений*. М., 1935. Одно из английских изданий: 1949.
- Whitworth W. A.** (1867), *Choice and Chance*. Cambridge, 1901.
- Wilks S. S., Уилкс С.** (1962, англ.), *Математическая статистика*. М., 1967.
- Winter F. L.** (1929), The mean and variability as affected by continuous selection for composition in corn. *J. Agric. Res.*, vol. 39, pp. 451 – 475.
- Wold H.** (1961), O. Anderson. *Annals Math. Stat.*, vol. 32, pp. 651 – 660.
- Wood T. B. & Stratton F. J. M.** (1910), Interpretation of experimental results. *J. Agric. Sci.*, vol. 3, pp. 417 – 440.
- Wright A., Lee A. & Pearson K.** (1907), Comparative study of queens, drones and workers in Vespa ... **Bk**, vol. 5, pp. 407 – 422.
- Yates F.** (1939), Comparative advantages of systematic and randomized arrangements in the design of ... experiments. **Bk**, vol. 30, pp. 440 – 466.
- (1951), Influence of Fisher (1925c) on the development of the science of statistics. **JASA**, vol. 46, pp. 19 – 34.
- Yates F. & Mather K.** (1963), R. A. Fisher. *Biogr. Mem. Fellows Roy. Soc.*, vol. 9, pp. 91 – 120.
- Young A.** (1771), *Course of Experimental Agriculture*, vols 1 – 4. Dublin.
- Young A. W.** (1916), Note on the standard deviations of samples of two or three. **Bk**, vol. 11, pp. 277 – 280.
- Yule G. U.** (1897), On the theory of correlation. **JRSS**, vol. 60, p. 812.
- (1921), On the time-correlation problem with especial reference to the variate-difference method. **JRSS**, vol. 84, pp. 497 – 537.
- (1938), Note on K. Pearson's lectures on the theory of statistics, 1894 – 1896. **Bk**, vol. 30, pp. 198 – 203.
- (1944), R. H. Hooker. **JRSS**, vol. 107, pp. 74 – 77.
- Yule G. U. & Filon L. N. G.** (1936), K. Pearson. *Obituary Notices Fellows Roy. Soc.*, vol. 2, pp. 73 – 110.
- Zabell S. L.** (1989), The rule of succession. *Erkenntnis*, Bd. 31, pp. 283 – 321.
- Zeuner G.** (1869), *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*. Leipzig.
- Ziliak S. T. & McCloskey D. N.** (2008), *The Cult of Statistical Significance*. Univ. Michigan.