Пятая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики
Статьи В. И. Борткевича и А. А. Чупрова, Биография В. И. Борткевича

Составитель и переводчик О. Б. Шейнин

Текст размещен также в Интернете www.sheynin.de

Содержание

От составителя

Мы приводим переводы некоторых статей Владислава Иосифовича Борткевича (он же, после переезда в Германию в 1901 г. на должность профессора Берлинского университета, Ladislaus von Bortkiewicz), 1868 – 1931, и Александра Александровича Чупрова (1874 – 1926). Биография Борткевича известна. Мы сами издали его переписку с А. А. Чупровым (Борткевич и Чупров 2005), дополнением к которой могут служить некоторые архивные материалы в нашей брошюре (Шейнин 1990), и собрали и перевели многие соответствующие статьи (Шейнин 2007), а этот сборник мы предваряем его общей научной биографией; впрочем, мы не смогли в ней в достаточной степени отразить его результаты в экономике и, возможно, в статистике населения.

Из огромного научного наследства Борткевича наиболее известен его закон малых чисел, и по этой причине мы перевели здесь не только его соответствующую брошюру 1898 г., но и несколько последующих работ автора, частично примыкающих к этой же теме. В примечаниях и комментариях мы подробно показали, что, вопреки утверждениям Борткевича, этот, когда-то прославленный закон, интересен только тем, что привлек внимание к почти забытому распределению Пуассона. Наш вывод вовсе не оригинален: то же самое, хоть всего только в нескольких строках, сказал А. Н. Колмогоров еще в 1954 г.

Мы включили еще две его статьи, в одной из которых Борткевич описал научные достижения Г. Ф. Кнаппа, наставника своего раннего творчества, в области статистики.

Биографию Чупрова мы описали по архивным источникам в упомянутой выше брошюре (1990). Здесь мы поместили перевод его статьи об истории сельской общины в России и перепечатали статью экономического содержания. Полагаем, что обе они интересны и сейчас.

Библиография

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926)*. Берлин. Также www.sheynin.de

Шейнин О. Б. (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка*. М.

---, составитель и переводчик (2007), *Четвертая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также www.sheynin.de

О. Б. Шейнин

В. И. Борткевич: научная биография

1. Некоторые общие сведения

1.1. Семья. Владислав Иосифович Борткевич (7 авг. 1868 – 15 июля 1931) родился в Петербурге в семье обрусевших польских дворян из Ковенской губернии (Ковно – ныне Каунас). Его мать – Елена, урожденная фон Рокика (Helene von Rokicka); отец, Иосиф Иванович, – полковник русской армии, затем нотариус и преподаватель математики в гимназии. Он опубликовал несколько книг или брошюр по экономике и финансам, а также учебников по элементарной математике, один из которых (1872) резко критиковал Чебышев.

Известно, что у Борткевича было по меньшей мере две сестры; об одной из них мы скажем ниже, другую он сам бегло упомянул в Письме № 78 1905 г.[1] В. И. закончил гуманитарную гимназию (Документы 1901 – 1938, 1901, п. 2, UK PA B 347) и юридический факультет Петербургского университета (1890 г.). В анкете 1901 г. В. И. (там же) назвал себя римским католиком, быть может желая отделить себя от греческих католиков (униатов), к которым после смерти его причислил Шумахер (1931, с. 211/573). В любом случае, однако, ни в его письмах, ни в сочинениях мы не нашли ни единого упоминания какой-либо религии или церкви, а Шумахер (там же) пояснил, что в соответствии с последней (?) волей Борткевича на его похоронах не было представителей церкви.

О политических взглядах Борткевича мы можем сказать немногое. В 1928 г. немецкий, а впоследствии широко известный американский статистик Гумбель (Шейнин 2003, с. 74) пытался (безуспешно) получить стипендию американского Международного бюро образования. За него ходатайствовал Эйнштейн, упомянувший и “мужественные [левые] политические

[1] Подобным образом мы ссылаемся на книгу Борткевич и Чупров (2005). Из контекста будет ясно, идет ли речь о письме Борткевича или Чупрова. Многочисленные ссылки вида Андерсон (1932, с. 207/530) относятся к авторам, чьи статьи о Борткевиче помещены в переводе в нашей книге Шейнин (2007). С. 207 указана по переводу, а 530 – по первоисточнику. Список таких авторов отдельно выделен в Библиографии.

произведения” соискателя, а Мизес (про политическую деятельность которого в те годы ничего не известно) и Борткевич были готовы поддержать его. Более того, известно (там же, с. 64), что в 1923 г. Борткевич “горячо рекомендовал” Гумбеля в Гейдельберг, а в 1925 г. издательство Тейбнер планировало начать издание статистического журнала, проектируемого Борткевичем и Мизесом (Чупров, Письмо № 196 1925 г.). Проект, впрочем, не был осуществлен[2].

Далее, Тённис (1932, с. 260/319) сообщил, что Борткевич “принадлежал” (активно ли? И с какого года?) Немецкой демократической партии. Добавим лишь, что гораздо влиятельнее была Социал-демократическая партия и что Шумахер (1931, с. 214/576) указал, что В. И. “совсем не интересовался национальной политикой”. Об этом же можно судить и по полному отсутствию политических тем в его переписке с Чупровым, и не потому, что аполитичным был последний. В России Чупров был публицистом, см список его газетных статей (Шейнин 1990, с. 131 – 134), впоследствии же, например, сотрудничал с английским Комитетом освобождения России, см. Шейнин (2007, Введение, п. 6).

Можно, пожалуй, заключить, что Борткевич был либералом, о чем свидетельствует и его исследование теории Маркса (см. п. 4.1), и его резкая критика П. А. Некрасова, талантливого математика, который примерно в 1900 г. стал махровым реакционером и невообразимым путаником, по крайней мере в области теории вероятностей. Борткевич (1903) заметил у Некрасова *елейность* (с. 215), *реакционные вожделения* (с. 216) и желание обосновать *принципы твердой власти и самодержавия при помощи теории вероятностей* (с. 219), да и путаницу в его псевдофилософских изысканиях. Наконец, в близкой к политике социально-экономической области Загоров (1929, с. 203/12) причислил Борткевича к индивидуалистам.

Всю свою жизнь Борткевич, остававшийся холостяком, посвятил науке, будто следовал Библии (Шумахер 1931, с. 211/573): *Да не будет у тебя других богов перед лицом моим* (Исход 20:3).

1.2. Начало научной деятельности. Еще не закончив университета, В. И. обратился к статистике и экономике, опубликовав еще в 1889 г. заметку о смертности, две статьи о смертности и продолжительности жизни в России (1890b, 1891) в *Записках* Петербургской академии наук и в то же время серьезную экономическую статью (1890a) под заглавием *Полемика с Вальрасом*. Вот мнение Альтшуля (1931, с. 243/1183) об этой последней, которую, как и подавляющее большинство последующих работ, Борткевич написал по-немецки:

---

[2] В 1925 г. Чупров дважды (письма №№ 201 и 203) высказался в том смысле, что политика “слишком перебивает” научную работу Гумбеля. И заметим, что в том же году Чупров (Шейнин 1990, с. 15) написал Н. С. Четверикову, что издательство Тейбнер предложило ему стать главным редактором журнала “с Мизесом и Бортк. помощниками”, но что предложенные ему условия его не удовлетворили.

Уже в возрасте 21 года он стал противоречить самому Леону Вальрасу. […] *Тот, старше* […] *на три десятилетия, притом признанный глава лозаннской* [экономической] *школы, вступил с ним, с новичком, в многолетнюю переписку, которая включала рассмотрение труднейших вопросов математической экономики.* Неясно, правда, как Альтшуль узнал об этом.

Возможно, что в семье В. И. говорили на этом языке, что вряд ли, однако, было бы достаточно для столь свободного владения им. Быть может немецкий был основным языком в *гуманитарной гимназии*, см. наш п. 1.1, но в любом случае утверждение Андерсона (1932, с. 205/530) о том, что В. И. *вырос полностью в русской культурной среде,* несколько сомнительно.

Русское правительство (Андерссон 1931, с. 216/9), а, возможно, точнее, Министерство народного просвещения (Тённис 1932, с. 257/315), послало В. И. для дальнейшего обучения заграницу. Впрочем, уже в 1888 г., не опубликовав еще ни одной статьи, Борткевич написал письмо Кнаппу, предлагая перестроить методы изучения смертности (Андерссон 1931, с. 217/9). Автор продолжает, а затем цитирует Кнаппа[3]:

Мастер в такой степени одобрил основные направления его предложений, что спросил фон Борткевича[4]*, кто он такой, и как случилось, что он занялся столь редкими и необычными темами.* […] *“Мне было бы еще приятнее получить когда-нибудь возможность лично познакомиться с Вами”.*

Прав был Шумахер (1931, с. 213 – 214/575), заявивший, что Борткевич

Уже в юности смог поразительно верным чутьем выбрать обоих в корне отличных друг от друга, больше всего соответствовавших его собственной сущности, – Георга Фридриха Кнаппа и Вильгельма Лексиса.

В мае 1891 г. (Андерссон 1931, с. 217/10) для В. И. *заграницей* действительно оказался немецкий (в то время) Страсбург, ректором университета в котором был Кнапп:

Его обязанности не позволяли ему продолжать преподавательскую деятельность, и было решено начать в сентябре специальный каникулярный курс. В течение шести недель, по три – четыре часа ежедневно, Кнапп рассказывал о результатах своих математико-статистических исследований, часто у доски […]. *Он был щедро вознагражден квалифицированным участием своего ученика в этом своеобразном предприятии.*

“Если меня когда-либо спросят о Вашем мастерстве,” – писал он фон Борткевичу в 1894 г., – “я выражу свое глубокое

[3] Андерссон не указывает своего источника, но известно, что в бумагах Борткевича, хранящихся в Упсале, см. Библиографию, имеются и письма к нему от Кнаппа (и многих других, также упоминаемых им без ссылок).

[4] После своего переезда в Германию Борткевич начал называть себя на польский манер Ladislaus von Bortkiewicz. Впрочем, польское произношение в этом случае не отличается от русского.

восхищение”. За год до этого он написал, что рад, что нашел такого прекрасного продолжателя трудов, которые были так тяжелы для него. “Только подумайте,” – признавался он в 1893 г., – “что за исключением Лексиса и меня самого нет ни одного <u>*высокого*</u> *статистика и нет никакой надежды на это”.*

С начала летнего семестра 1892 г. В. И. переселился в Гёттинген, к Лексису, где изучал экономику, статистику и философию (Лорей 1932, с. 246 – 247, 200). Там в 1893 г. он получил степень доктора философии за диссертацию (1893а)[5] и даже, видимо в том же году, прочел в Вене доклад (1892) об отражении профессий в прусской статистике. В основном же Борткевич был занят преподаванием страхования рабочих и теоретической статистики, – снова в Страсбурге. Там же в 1895 г. он стал приват-доцентом, представив в качестве сочинения две первые части своей работы (1894 – 1896), см. Лорей (1932, с. 247/200)[6].

Затем Борткевич всё же вернулся в Россию и с 1 сентября того года (Письмо № 25 1897 г.) работал в Петербурге, в пенсионной кассе служащих казенных железных дорог. Покотилов (1909; см. рецензию на этот источник) сообщил, что он вместе с В. И. составил успешно проведенный в жизнь план первого в России государственного страхования рабочих. Впрочем, позднее Чупров (Письмо № 59 1901 г.) поздравил Борткевича с уходом (см. п. 2) от “административной работы”.

Эту свою деятельность Борткевич скрывал от Страсбургского университета (Письмо № 27 1897 г.), поскольку ее нельзя было совмещать со званием приват-доцента. Осенью 1899 г. В. И. начал кроме того читать лекции по статистике в престижном Александровском лицее (Письмо № 48 1899 г.), куда его рекомендовал Александр Иванович Чупров (Письмо № 25 1897 г.)[7].

2. Переезд. Преподавание

Да, в 1901 г. В. И. действительно ушел и из пенсионной кассы, и из лицея, и вообще переехал в Германию, где и прожил всю оставшуюся жизнь. С 15 января 1901 г. (фактически – с 1 марта) он (Документы 1901 – 1938, 1901, п. 1, UK PA B 347) был “назначен” экстраординарным профессором философского факультета берлинского Университета Фридриха-Вильгельма (ныне – Университет им. Братьев Гумбольдт, неверно называемый в русской литературе *им. Гумбольдта*). Ему вменялось в обязанность “представлять статистику и родственные дисциплины (страховая наука, учение о населении и пр.)”, а при необходимости “способствовать пополнению учебного плана в области народного хозяйства”.

---

[5] Андерссон (1931, с. 216/9) ошибочно указал 1892 г. Сам Борткевич назвал в своей анкете 1901 г. дату 6 февраля 1893 г. Ссылаясь на нее (Документы 1901 - 1938, 1931, п. 2, UK PA B 347), мы, к сожалению, не привели этого факта.

[6] Этот же автор указывает, что Борткевич имел в виду стать доцентом в Гёттингене.

[7] Известно также, что в 1895 г. А. И. Чупров переписывался с Кнаппом (Шейнин 1990, с. 23) и что (там же) 14 декабря 1897 г. Борткевич прислал ему “очень лестную аттестацию” сына (не сохранилась). Можно поэтому полагать, что А. И. уже в те годы был высокого мнения о Борткевиче.

В частности, министериальдиректор Альтхоф (см. ниже) указал, что Борткевич должен будет включить в свои лекции “научные вопросы российской государственной жизни” и обсуждать экономические отношения, существующие в России (Voigt 1994, с. 337).

Инициатива приглашения, как указал Лорей (1932, с. 249/202), “видимо” исходила от Лексиса, Андерссон (1931, с. 217/10) же сообщил об этом безоговорочно и добавил, что вначале приглашение получил сам Лексис, который, однако, не захотел покидать Гёттинген и предложил вместо себя Борткевича. Сам В. И. (1915, с. 30/330 – 331 описал близкие отношения Лексиса с прусским Министерством образования (точнее, с Министерством по духовным, учебным и медицинским делам и, в частности, с Альтхофом), а в другом месте (Письмо № 79 1905 г.) заметил мимоходом, что, видимо к тому времени, Лексис возымел желание передать ему свою гёттингенскую кафедру.

Экстраординарным берлинским профессором Борткевич пробыл до 1920 г., после чего получил звание *ординариуса* того же факультета (Документы 1901 – 1938, 1920, п. 6, Phil. Fak. 1469, Bl. 67)[8]. Вот что заметил Шумпетер (1932, с. 240/338 – 339) по этому поводу:

Этого знаменитого человека никогда не считали кандидатом на какую-либо крупную кафедру в Берлинский или в любой иной университет. Лишь в 1920 г., когда в результате меры, имевшей целью демократизировать факультеты, все экстраординарные профессора стали ординарными […]. *Те его коллеги, которые были обязаны предложить его кандидатуру Министерству образования, вряд ли могли понять его труды.*

В 1906 г. (Документы 1901 – 1938, 1906, п. 8, UK PA B 347) Борткевич был назначен “доцентом по совместительству в Коммерческом училище Союза купеческого сословия Берлина” с обязательством читать двухчасовую еженедельную лекцию по страховой науке. В 1931 г., после смерти В. И., попечительский совет училища (там же, п. 10, тот же шифр) выразил “свое искреннее соболезнование” незамужней сестре покойного, Елене (проживавшей в Берлине совместно с братом)[9], выделил деньги для установки надгробного камня и указал, что Борткевич

Был тесно связан с нами, образцово обучал студентов со времени открытия училища до зимнего семестра 1922/1923 г. Ему удалось исключительно достойно сочетать научную основательность и понятный метод преподавания.

[8] Там же сохранилась любопытная рукопись: кто-то, по всей видимости, коллеги Борткевича, “были озабочены его национальной принадлежностью”, однако В. И. “письменно засвидетельствовал признание своей немецкости”. Эти *заботы*, конечно же, лишний раз показывали особое недоверие немцев к остальному миру, которое, несмотря на нынешнее отвратительное демографическое состояние Германии, чувствуется и сегодня.

[9] В 1918 г. Борткевичу “удалось добиться” ее выезда из России (Письмо № 143 Чупрова того же года). Можем только добавить, что в 1916 г. ее переводы с итальянского появились в №№ 6 и 7 *Математического образования.*

И, наконец (там же, п. 12, шифр WHB 603/1), в феврале 1938 г. секретариат того же училища (переименованного в Училище народного хозяйства) сообщил в документе, видимо предназначенном для собственного архива, что исчезнувший из актового зала портрет Борткевича, был, очевидно, унесен “посторонним в ошибочном предположении, что фон Борткиевич не был немецких кровей”. Нет, был Борткевич не немецких кровей, а поляком (см. п. 1.1) и даже полонофилом, т. е. почитателем Польши, как заметил Чупров в 1900 г. (Шейнин 1990, с. 26). А документ секретариата по существу оправдывал *постороннего*, что, конечно же, вполне соответствовало обстановке в нацистской Германии.

Так действительно ли В. И. был хорошим лектором? Существуют свидетельства противного, да он и сам (Письмо № 79 1905 г.) сообщил, что не ценит себя “особенно высоко как лектора и руководителя”. Последнее слово видимо означало руководителя аспирантов; одним из руководителей семинара (Берлинского университета по государственному народному хозяйству и статистике) он был назначен лишь в 1913 г. (Документы 1901 – 1938, п. 3, Phil. Fak. 1466, Bl. 186). И во всяком случае Лорей (1932, с. 252/205 – 206) заметил, что Борткевич был “первым оппонентом” при защите 15 диссертаций в Берлине и что их списком он обязан Мизесу.

Многие авторы в один голос подтверждают, что В. И. был просто неважным лектором, и самое четкое утверждение об этом мы находим у Макса Вебера, экономиста и со-основателя социологии, которого процитировал Меерварт (1936, с. 232 – 233/257):

Как по крайней мере полагает большинство присутствовавших, самым скучным из сегодняшних докладов был тот, который прочел […] *Борткевич. Он же, однако, был самым дельным, а содержавшиеся в нем критические замечания в наибольшей степени профессионально способствовали нам.*

Борткевич обсуждал отбор работников для крупных предприятий и их приспособляемость. Лорей (1932, с. 251/205), повторивший эту цитату по еще в то время не опубликованному некрологу (Меерварт 1936), добавил, что она относилась к выступлению В. И. 1911 г. на конференции Союза социальной политики.

Следует еще отметить утверждение Альтшуля (1931, с. 245/1184):

Бесконечно много забот и внимания Борткевич уделял переработке и постоянному расширению своих лекций. Собственно педагогическая деятельность была ему, однако, не по душе. Он не видел возможности в достаточной степени донести до более широких кругов свой утонченно усложненный образ мыслей, но тем продолжительнее было его влияние на отдельных и близко стоящих к нему ученых.

Вряд ли известно (Документы 1901 – 1938, 1916, п. 4, Phil. Fak. 1467, Bl. 123; 1917, п. 5, Phil. Fak. 1467, Bl. 195), что с ноября 1916 г. по февраль 1917 г. Борткевич занимал должность "научно-статистического работника в Гражданском управлении Генерал-губернаторства в Варшаве […] с освобождением от обязанности чтения лекций" (в Берлине)[10]. Об этой работе не известно ничего, но укажем, что Борткевич опубликовал одну статью (1901) на польском языке и еще одну (1930b) на немецком и польском языках. Возможно, что именно эту последнюю упомянул Андерссон (1931, с. 227/24): "Памятная записка в 44 печатные страницы о пожизненной ренте для должников по закладным, написанная в прошлом [1930-м] году по просьбе польского правительства".

По случаю смерти Борткевича *Kwartalnik Statystyczny* опубликовал некролог, чего не было сделано в Советском Союзе; напротив, несколько позже Старовский (1933) назвал Борткевича (заодно с Зюссмильхом, Кетле и Чупровым) буржуазным статистиком. Все они, мол, доказывали незыблемость капиталистического строя и устойчивость его законов. Так в то время советские статистики характеризовали исследования устойчивости статистических рядов. См. также Аноним (1927).

3. Характер и условия научной работы

3.1. Субъективные аспекты

1. Знание математики. Борткевич не имел математического образования, что почти не отразилось на его опубликованных работах, и, следует признать, является его крупным субъективным успехом. Шумпетер (1932, с. 241/339) даже заявил, что В. И., не бывши "зачинателем" в экономике, упустил легкую возможность стать великим

Своим отказом полностью использовать математический арсенал, которым он владел и который в период его расцвета мог бы сделать его соперником славы Эджворта и Барон [итальянский экономист математического направления, 1859 – 1924].

Впрочем, на первых порах, еще до переезда в Германию, Чупров помогал ему в его математических изысканиях, и это ясно заметно в первых письмах их переписки. В частности (письма №№ 14 1896/1897 г. и 15 и 17 1897 г.), он убедил В. И., что его сомнение в верности доказательства одной теоремы у Гаусса было беспочвенным.

Некоторые шероховатости (и, по большому счету, ошибки) у Борткевича всё же были. Лорей (1932, с. 250/204) заметил, что в одном случае В. И. (1893a) неверно счел, что из непрерывности функции следует ее дифференцируемость. По поводу критики Парето (см. также п. 3.1.4) Чупров (Письмо № 25 1898 г.) указал, что у Борткевича (математическая) "аргументация не вполне точная". Сам В. И. (1917, с. III) сообщил, что старался обходиться элементарными математическими средствами, и, видимо, не только в указанной книге и весьма неудачно добавил: "Применение производящих функций [для тех же целей] аналогично решению

---

[10] Генерал-губернаторство было создано в августе 1915 г. в Варшаве после оккупации Польши немецкими и австро-венгерскими войсками.

уравнения $2x - 3 = 5$ при помощи определителей”. Определителя в этом случае вообще не существует.

О нежелании, вопреки совету Маркова и вряд ли разумно, применять указанные функции (и последовательное дифференцирование), Борткевич сообщил и Чупрову (Письмо № 7 1896 г.) при подготовке своей брошюры о законе малых чисел (1898b). И вообще этот математический аппарат применим к случайным величинам вообще, а не только к исследуемому им биномиальному распределению.

Весьма критично о некоторых математических выкладках Борткевича высказался Кейнс (1921, с. 403, прим. 2; 1973, с. 440, прим. 2):

Математические доказательства верны и часто блестящи, но становится всё труднее решить, зачем они всё-таки нужны, к чему приводят и на каких предпосылках основаны.

Мы сами (п. 4.3), наконец, замечаем серьезные недостатки в законе малых чисел. Любопытно, что Лорей (1932, с. 250, прим. 8/203, прим. 5) оказался единственным математиком, поздравившим Борткевича с 60-летием (как сообщил ему благодарный юбиляр).

2. Критический настрой. Чупров (Шейнин 1990, с. 26) в письме 1900 г. отцу охарактеризовал Борткевича на основе своего знакомства с ним в Германии:

Его интересует упражнять и проявлять свои недюжинные силы. […] *Он очень самолюбив, любит людям импонировать.* […] *На этой почве у него развивается показное отношение к науке.* […] *Силен в Бортк. и скептицизм.* […] *В существе у него и к науке, и к жизненным вопросам вполне серьезный и интерес, и отношение, но он предпочитает этого не показывать, ему в большинстве случаев нравиться рисоваться скептицизмом.*

Да, действительно, скептицизм Борткевича не был только показным. Его весьма многочисленные рецензии доказывают, что основания для него были весьма основательны. Заметно также, что некоторые важные труды, например (1917; 1923 – 1924) он вначале задумал как критические рецензии (и формально таковыми они и остались).

Более того Андерсон (1929, с. 192/7), указал, что, описывая идеи других (Пуассона, Лексиса, Дмитриева, Гельмерта), В. И. “вкладывает в них столько своего, так освещает и дополняет их, что получается нечто совсем новое и оригинальное”. Шумпетер (1932, с. 241/339) даже утверждал, что свои собственные труды В. И. представлял в виде критики. И вот примечательное свидетельство Войтинского (1961, с. 452 – 453): издатели перестали просить Борткевича рецензировать книги (или рукописи?) своих авторов, поскольку его критика оказывалась слишком глубокой. Этот же автор процитировал самого В. И.: “Я не рецензирую работ своих знакомых, и не стремлюсь встречаться с авторами, чьи работы мне приходиться оценивать”. Можно добавить (Андерсон 1931; 1932, с. 208/533):

Борткевич в течение многих лет до самой кончины был своего рода “верховным контролером” научной мысли в области своей специальности[11]*, и не один автор, публиковавший работу по теории статистики или политической экономии, с волнением, а иногда с трепетом, ожидал его отзыва, нередко сурового, порой жестокого, но всегда нелицеприятного и обоснованного. Но зато короткое слово одобрения из уст этого аскета науки значило больше, чем самая пламенная похвала со стороны других. Поэтому научное значение Борткевича должно быть измеряемо* […] *и тем, что было написано другими благодаря ему, под влиянием его критики и в результате его указаний.* […] *В большую заслугу Борткевичу можно поставить и то, наверное весьма значительное количество посредственных и слабых* […] *работ, которые <u>не были</u> выпущены в свет из боязни подвергнуться его сокрушительной критике.*

Борткевич считался резким и раздражительным судьей, чьи приговоры принимали во внимание даже самые выдающиеся ученые. Полагали даже, и не совсем шутя, что его научная значимость состоит […] *и в том, что из боязни его уничтожающей критики и т. д.* […] *Никто из ученых не был ему лично так близок, как А. А. Чупров, но* […] *между ними происходили научные поединки, при которых наносились весьма болезненные удары.*

И еще (Меерварт 1936, с. 232/256):

Иногда его критика становилась педантичной и скучной, обстоятельно и сильно бичующей и крупные, и мелкие погрешности, но по поводу содержания и пользы его критики никаких сомнений никогда не возникало.

В таком же духе высказывались многие. “Каждое небрежное и двусмысленное выражение он воспринимал как прегрешение перед духом науки” (Шумахер 1931, с. 213/575) – не только воспринимал, но и критиковал. И вот более определенно (Гумбель 1968, с. 26): “Он критиковал так же основательно и с тем же рвением существенные и незначительные ошибки, в том числе вычислительные, и опечатки”.

Если же иметь в виду лишь научную значимость трудов Борткевича, то ее критики почти не было (см. также конец п. 2.5). Исключение составляет его закон малых чисел (п. 4.3) и, конечно, четкое мнение Чупрова (1918 – 1919/1968, с. 221 прим. и 225 прим.) о принципиальной ошибочности противопоставления Борткевичем школы Пирсона и Континентального направления статистики.

3. Отсутствие обобщающих трудов. Самокритичность, видимо, оказалась одной из причин, по которой В. И. не оставил никакого

[11] “Контролер мысли в статистических и экономических науках” (Мишайков 1929, с. 189/5).

обобщающего труда и не создал школы; Гумбель (1931, с. 237/233) заявил, что это

Было частично вызвано его тяжелым характером. […] *Он недооценивал свои собственные работы и даже ошибочно сомневался в их практической значимости. Это могло способствовать тому, что, обладая излишне развитым чувством ответственности и побаиваясь возбуждать надежды у даровитых людей, он недостаточно привлекал их к себе.*

Мало того (Шумпетер 1932, с. 242/340): Борткевич “настолько сдерживал себя от распространения своих идей, что частично утерял свои притязания на особую оригинальность”.

Другую причину указал Андерсон (1932, с. 210/535):

Несколько лет назад одно немецкое издательство предложило […] *опубликовать сборник его более важных исследований. Из этого ничего не вышло, потому что он предпочел тогда новое исследование переработке прежних статей и сообщил мне примерно в то же время, что всё поставил на то, чтобы ничего из начатого и сделанного наполовину не унести с собой в могилу, хотя при его неожиданной смерти он вполне мог унести с собой бóльшую часть этого*[12].

Андерссон (1931, с. 224/16) упомянул, наконец, и третью причину: в каждой своей работе Борткевич предпочитал исследовать одну основную тему, что трудно осуществить при составлении книги. Здесь, однако, следует оговориться, см. ниже.

4. Малый круг читателей. Гумбель (1931, с. 237/233) заметил, что его

Основательность иногда нарушала прямолинейность хода мысли. В главное русло каждого исследования встраивались многочисленные боковые потоки и обсуждались объемистые дискуссии, а потому его труды требовали от читателей серьезной внимательности, но настоящим читателям давал он много.

И сколько же их было, этих настоящих? Винклер (1931, с. 1030) цитирует полученное им письмо (когда?) Борткевича: “Радуюсь, что в Вашем лице нашел одного из пяти ожидаемых мной читателей”…

[12] Много раньше, с 1910 г. А. А. Кауфман пытался издать сборник переводов работ Лексиса и Борткевича, против чего В. И. никак не возражал, но обычные трудности, а затем и война похоронили этот план. Неудачным оказалось и намерение Борткевича опубликовать свой *Закон малых чисел* (1898b) также и на русском языке, в *Записках* Академии наук. В Письме № 27 1897 г. он сообщил, что предстоящее появление работы на немецком языке делает это невозможным. В том же письме он добавил, что Марков прочел эту работу и написал Непременному секретарю Академии, что она “не содержит грубых ошибок” (выражение Маркова), но что он, Марков, не берется судить о ее научном значении.

Боковые потоки (или даже второй основной поток) можно найти в знаменитой брошюре В. И. (1898b) о законе малых чисел. В Предисловии он указал, что ставил себе целью показать, что и малые числа подчиняются вероятностной схеме (Пуассона), фактически же рассматривал и исследование устойчивости статистических рядов. Второй пример: Борткевич (1898c) неудачно скомпоновал свою критическую статью о труде Парето и Чупров (Письмо № 35 того же года) решительно так и сказал, Борткевич же в следующем письме по существу ничего на это на ответил. По этому или иному поводу Андерсон (1932, с. 209/533) заявил:

Борткевич не писал для широкого круга […] *и вовсе не был хорошим популяризатором своих собственных идей. Кроме того, он предъявлял очень высокие требования к подготовке и интеллекту своих читателей. С упрямством, частично обусловленным своим научным отшельничеством, а частично, разумеется, объяснимым "романтическим" типом своего научного духа, он отказывался воспринять советы "классика" Чупрова и выбрать для своих сочинений более понятную внешнюю форму.* […]

К этому добавлялось, что название и источник публикации совсем не всегда соответствовали тому, что читатель мог бы справедливо отыскивать там (следовали примеры).

Мы не уверены, что когда-то предложенное В. Г. Освальдом подразделение "гениальных ученых" на *романтиков* и *классиков* (о чем Андерсон и сообщил) удержалось. Выбор источника публикации был для Борткевича (и Чупрова) совсем не прост: и журналов подходящих было немного, и математически направленные рукописи принимались далеко не всеми ими, см. в п. 3.2.1 о столкновении Борткевича с Майром. Привело это (вдобавок с желанием Чупрова заработать себе на жизнь, а Борткевича – пополнить свой довольно скромный заработок) к необычайной разбросанности (и труднодоступности) статей обоих названных ученых, на что, конечно же, указали многие.

Не могла привлекать читателей манера Борткевича входить в подробности не только по отношению к другим (см. выше п. 3.1.2), но и в своих собственных трудах: "самое малое никогда не было для него незначительным" (Андерсон 1932, с. 207/532).

5. Знакомство с литературой. Исключительное знакомство с историей и современным состоянием интересующих Борткевича тем и наук, которое отмечали многие авторы (Меерверт 1936; Шумахер 1931), было весьма сильной стороной его творчества. В сочетании с его собственными трудами, которые по этой причине (и в соответствии с его складом мышления) были исключительно разносторонними (Альтшуль 1928, с. 202/1225, по отношению к экономике), обеспечили ему прозвище "Папа статистики" (Войтинский 1961, с. 452 – 453), а тот же Альтшуль назвал его "верховным правителем". Широта знаний Борткевича была "огромной" (Андерсон 1932, 207/532), "энциклопедической" (Альтшуль 1931, с. 243/1183). Ранее Андерсон (1929, с. 192/7) указал, что у В. И. “обширность познаний и круг научных интересов действительно громадны”.

Среди трудов Борткевича можно указать работы об Аристотеле (1906b) и Лейбнице (1907) и о многих статистиках и крупнейших экономистах; о его исследованиях марксовых схем см. наш п. 4.1.

6. Отрицательные моменты. При всем положительном, сказанном выше о Борткевиче, приходится добавить к п. 3.1.4 что-то отрицательное и помимо упрямства (Андерсон). Основательность его статей (Гумбель, также п. 3.1.4) видимо иногда нарушалась. В Письме № 6 1896 г. он согласился с замечанием Чупрова: “Я и сам сознаю некоторую недоконченность или непродуманность отдельных мест в этих [прежних своих] статьях”. И в том же письме, наверняка по поводу еще не вышедшей брошюры (1898b) о законе малых чисел:

Положительно не могу тратить так много времени. Лучше не ждать, а поделиться тем, что имеешь сказать нового. […] *Можно будет впоследствии напечатать* [дополнения на ту же тему].

Другой случай касается обвинений В. И. в плагиате со стороны Джини. Последний опубликовал статью (1912), на которую Борткевич не сослался в своем “великом сочинении” (1930a), как его назвал Андерссон (1931, с. 225/17), о распределении доходов. Андерссон подробно описал всё дело и полностью оправдал Борткевича, сам же обвиняемый вскоре умер, но его ответ Джини был опубликован посмертно (1931). И тем не менее мы дополним описание этого эпизода.

Джини сообщил, что его статью 1912 г. неоднократно упоминали другие авторы, Чупров же получил от Джини ее оттиск и (слишком) кратко описал его (Письмо № 122 1913 г.). В следующем письме того же года Борткевич заявил, что в берлинской Королевской библиотеке (нынешней Staatsbibliothek) статей Джини нет, что дает ему “полное право означенных статей […] не касаться”. Странное утверждение! В любом случае он обязан был упомянуть Джини как своего возможного предшественника, хоть тот и оставался ему, возможно, неприятным в связи с дискуссией двадцатилетней давности о законе малых чисел.

3.2. Объективные аспекты

1. Антиматематические настроения ученых. Общеизвестно, что в начале XX в. подготовка экономистов в Германии не включала изучение математики, так что специалисты ее не понимали и знать не хотели. Андерсон (1932, с. 209/533), например, отметил, что немецкие экономисты были “расположены против математики”. Ранее он (1929, с. 193/8) указал, что “громадное большинство” немецких экономистов питало “неискоренимое отвращение” к математике. Он же (1932, с. 206/531), повторив самого себя (1929, с. 194/8), четко заявил:

Наше (молодое) поколение статистиков вряд ли может представить и то болото, в котором очутилась статистическая теория после развала системы Кетле, и тот выход из него, *который в то время* [с 1870-х годов] *сумели найти только Лексис и Борткевич.*

Еще раньше примерно то же сказал Чупров (1909/1959, с. 215).

Мы (2002, с. 66 – 67) заметили по этому поводу, что после смерти Кетле в 1874 г. его скромные вероятностные идеи и (далеко не всегда верные) выводы были объявлены бесполезными. Статистики просто не желали вникать в суть исследуемых ими явлений и ограничивались рассмотрением простейшей схемы Бернулли. У большинства из них, впрочем, не было достаточных математических знаний (не говоря уже – знаний теории вероятностей).

Для примера можно назвать Кнаппа и фон Майра. Из-за отхода Кнаппа от математического направления статистики Чупрову пришлось отказаться от первоначально задуманной им темы диссертации, см. Письмо № 30 1898 г. и Шейнин (1990, п. 7.2).

По поводу Майра Тённис (1932, с. 258/317) вежливо заметил, что тот "так и остался совсем не математическим статистиком, что нисколько не вредит его заслугам в статистике, понимаемой в его смысле". И вот Письмо Борткевича № 109 1911 г.: Майр выступил на сессии Международного статистического института "с заявлением о ненужности математических формул в математике". И далее там же: "самым частным образом" Майр сказал ему, что "еще больше, чем математику, он не выносит [еще меньше … выносит] современной теории познания".

Примерно в 1916 г. Майр, в качестве редактора журнала *Allgemeines statistisches Archiv,* отклонил рукопись Борткевича, заявив, что тот лишь математик и "ничего не смыслит" в государствоведении. Борткевич почувствовал себя тем более оскорбленным, что Майр ранее помещал в своем журнале статьи математического направления и заявил, что никогда раньше его статей никто не отклонял и что он порывает с Немецким статистическим обществом, чьим органом является *Архив*[13]**.** Всё сказанное В. И. изложил в письме Майру, которое перепечатал Андерссон (1931, с. 221 – 222/14 – 15).

В обстановке неприятия теории вероятностей и математики вообще Борткевичу несомненно приходилось несладко. Его голос (Шумахер 1931, с. 214/576)

---

[13] Много раньше был всё-таки еще один случай, когда статью Борткевича отклонили, но только по недоразумению. В Письме № 22 1897 г. Борткевич сообщил, что *Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона* отклонил его рукопись *Незаконные рождения*. Каким-то образом *Словарь* заказал подобную статью еще одному автору [В. И. Покровскому, экономисту и одному из пионеров земской статистики, члену-корреспонденту Академии наук с 1912 г.], и тот опередил В. И., который поступил столь же решительно как и в описанном только что случае, – отказался от дальнейшего сотрудничества со *Словарем*.

Таким образом, это издание опубликовало только одну статью Борткевича (1897), но затем – статью о нем самом (Чупров 1912), уже в *Новом энц. словаре*, а раньше – анонимную и очень короткую заметку о нем же (Доп. полутом 1, 1905 г.).

Не доходил ни до политиков [это-то понятно], *ни до руководителей экономики. Сознание безрезультатности своей науки несколько разочаровало наконец и его, этого далекого от жизни апостола науки, и способствовало тому, что он всё более и более отдалялся от политэкономии и приближался к статистике.*

Приближался к статистике, которую ему пришлось перестраивать (после Лексиса и вместе с Чупровым)! Снова Шумахер, несколько раньше (с. 212/574, а следовало бы позже):

Какие следствия извлекут из его пояснений другие, находилось для него по ту сторону науки и потому было ему безразлично. […] *Таким образом в его научной деятельности многократно проявлялась черта пассивности и отрицания.*

2. Чужеродный элемент. В Германии Борткевич (Андерсон 1929, с. 192 – 193/8) оставался

До известной степени чужеродным телом и его скорее следует признать международным или даже русским, чем немецким профессором. (От англичан […] *Борткевич отличается более строгими требованиями, опять же в духе русских математиков* […]*).*

Но вот за пределами Германии Борткевич (Андерсон 1931) "пользовался несравненно большим признанием", чем в ней самой**[14]**, "где у него почти не было учеников". Короче всех выразился Шумпетер (1932, с. 240/339): В. И. оставался "в полной изоляции".

Выше (п. 1.3, Прим. 8) мы сообщили о чьей-то озабоченности иноземным происхождением Борткевича, теперь добавим: не было для этого никаких причин. Его ученик, Фрейденберг (1931, с. 253/123), сказал о нем словами Гёте: "Он ведь был нашим"**[15]**. И более подробно Тённис (1932, с. 260/319):

Борткевич обладал необычной научной честностью. Немецкая основательность нашла в нем, как и во многих других, не принадлежащих нам по рождению, одного из лучших представителей. Но он по своей воле стал хорошим немцем, сознательным гражданином немецкой республики […][16].

---

[14] Андерссон (1931, с. 218/11) высоко оценил заслуги Борткевича в развитии статистики в скандинавских странах, а П. Д. Азаревич (Фортунатов 1914, с. 237) в 1912 г. написал, вполне возможно выразив общее мнение русских статистиков, что "Всякий раз, когда я вижу [он видит] В. И., мне [ему] становится жаль, что его упустили из России. Вот истинный человек науки".

[15] Безгранично восторженный некролог, написанный им на смерть Борткевича, оказал плохую услугу его памяти.

[16] Андерсон (1929, с. 192/7) справедливо заметил, что научная работа Борткевича "имеет своеобразный характер [был чужеродным элементом!] и в некоторой степени приближается к манере Эджворта". Быть может он не захотел пояснять свое высказывание в соответствии с мнением Чупрова (1909/1959, с. 27 – 28).

Последний указал, что Эджворт был "слишком во всём индивидуален", что чтение его трудов весьма затруднительно и он "не находил отзвука", но что он подготовил почву для восприятия идей биометрической школы в Англии.

3. Членство в научных обществах. Следует еще перечислить те общества, членом которых был Борткевич (не только на основании своей научной деятельности, но и своего положения в стране и мире). Он был членом Шведской академии наук, Королевского статистического общества, Американской статистической ассоциации, Международного статистического института и Страсбургского научного общества во Франкфурте-на Майне (Тённис 1932, с. 258/316) и вышел из Немецкого статистического общества (п. 3.2.1), а о членстве и деятельности В. И. в Немецком союзе страховой науки см. п. 4.2.

О Страсбургском обществе нам ничего не известно, но вот по поводу Шведской академии мы напомним, что Борткевич имел заслуги в развитии статистики в скандинавских странах (п. 3.2.2, Прим. 14.

4. Посмертный архив. Андерссон (1931, с. 218, 228/11, 25 – 26) описал богатый архив Борткевича, но не указал его местонахождения; в то время (1931 г.) архив, видимо, был в Берлине. Среди корреспондентов, посылавших письма Борткевичу, Андерссон назвал скандинавских ученых Фриша, Гульдберга, Мейделя, Стеффенсона, Вестергаарда, К. и С. Викзеля, а "самыми важными" назвал письма от Вальраса и Чупрова. Он (с. 228/25) дополнительно заметил, что остались и письма самого В. И. (видимо, черновики), которые содержали высказывания "относящиеся к основополагающим научным проблемам".

И, наконец, Андерссон (с. 228 – 229/25 – 26) упомянул и тексты лекций Борткевича, "обычно практически готовые к публикации" и хранившиеся "в полном порядке". Их предметами были статистика, социальная политика, экономика и технические проблемы страхования, равно как и упражнения по статистике и социальной статистике.

Среди упомянутых скандинавских ученых мы не поинтересовались хорошо известным Вестергаардом, а К. Викзель, как можно понять из писем Чупрова №№ 195, 196 1925 г., не был статистиком, но, впрочем, в каталоге архива Борткевича (см. ниже) он числится профессором. Каждый из остальных ученых опубликовал большое число статей по математической статистике, некоторые из них – и по теории вероятностей и/или статистике (Kendall & Doig 1968), а Стеффенсен и по математическому анализу. Он был к тому же учителем нынешнего корифея математической статистики Хальда, который посвятил его памяти свою брошюру (2002).

Архив Борткевича оказался в Упсальском университете (Швеция), где его разыскал Г. Раушер (Вена), и там же, в библиотеке Статистического института, как нам любезно сообщил Библиотекарь университета, доктор Халлберг, хранятся книги, находившиеся в пользовании Борткевича и проданные университету Еленой Борткевич (весьма скудные сведения о ней см. в п. 2, Прим. 9) при посредничестве Андерссона. "По-видимому”, добавил Халлберг, архив В. И. был получен вместе с книгами. Каталог архива, который высылается по требованию, упоминает письма многих ученых, включая, например, Махаланобиса и Кантелли.

В том же архиве хранятся очень кратко описанные нами (Борткевич и Чупров 2005, с. 10) письма А. А. Кауфмана, М. В. Птухи и Н. С. Четверикова, также уже опубликованная переписка Борткевича с Е. Е. Слуцким (Виттих, Раушер, Шейнин 2007).

Наконец, письма от Вальраса, проданные, как нам сообщил года два назад Халлберг, Еленой Борткевич одному американскому экономисту, ныне опубликованы (Jaffé 1965), а письма Чупрова опубликовали мы (Борткевич и Чупров 2005), объединив их вначале с “московской” частью переписки. Полное отсутствие писем Борткевича за период 1919 – 1926 гг. неудивительно: выехав из Праги в Рим на короткое, казалось бы, время, Чупров так и не вернулся обратно, и эти письма (если он их хранил) вполне могли пропасть.

4. Результаты

4.1. Экономика. Весьма важным было у Борткевича исследование схем Маркса. Вот суждение Гумбеля (1931, с. 236/232) о его соответствующих сочинениях (1906 – 1907; 1919): “Как и Лексис, он не повторил часто высказываемых популярных возражений против Маркса. Он первым облек в математическую форму сухую схему Маркса” […] Много позже Гумбель (1968, с. 25) добавил, что один только Климпт [1936] воспринял работу В. И.

По существу же два комментатора, Загоров (1929, с. 198/10) и тот же Гумбель (только в 1968 г.), высказались по поводу исследований Борткевича. Первый счел, что В. И. доказал, что “Вся марксова теория ценообразования […] неверна. Против [его] критики не устоял и марксов закон убывающей процентной прибыли”. Но он добавил, что позднее Борткевич попытался “изложить свое конструктивное мнение” по этому вопросу.

И вот Гумбель: Борткевич “произвел необходимые видоизменения и согласовал марксову схему прибавочной стоимости и цен”, пытался “построить [еще не существовавшую] эконометрику по Марксу”.

Мизес (1932, с. 238/15) неопределенно указал, что Борткевич попытался дать “конструктивную сводку теорий ценообразования”, но заявил, что и его критика Бём-Баверка (1906а), и исследование схем Маркса имеют “непреходящее значение”. И уже сам факт появления написанного этим крупнейшим ученым некролога на смерть Борткевича говорит о многом, а в п. 1.1 мы сообщили о некоторых связях между Мизесом и Борткевичем.

О своем намерении написать статью под названием, с которым действительно совпало заглавие его работы (1906 – 1907), Борткевич указал в Письме № 79 1905 г., добавив, что хочет в ней “коснуться нового сочинений Туган-Барановского”. Климпт (1936, с. 74), которого упомянул Гумбель (см. выше), назвал Туган-Барановского (1905), Борткевича и еще одного автора (Charasoff 1910), в отличие от Маркса и его предыдущих комментаторов, исследователями “внутренней механики” капиталистической экономики и указал в Предисловии, что исходил из работ Борткевича, хотя и не был во всем согласен с ним. Первым “референтом” его диссертации, защищенной в 1930/1931 г., был, кстати, Гумбель, что и указано на обороте титульного листа диссертации, опубликованной в 1936 г.

Заметим, что исследовать марксовы схемы Борткевич решил в какой-то степени под влиянием предшествующего автора, ср. п. 3.1.2.

Многие комментаторы высказали суждение об экономических сочинениях Борткевича в целом. Шумахер (1931, с. 211/573) заявил, что в экономике он “занимал в высшей степени особое и даже единственное положение, притом не только в Германии, но и во всем мире”. Подробнее об этом сказал (Андерссон 1931, с. 218/10 – 11):

Несколько десятилетий он оставался одним из первых в попытках перенять строгие научные правила для изучения самых трудных вопросов экономической теории. Его многочисленные труды по экономике до сих пор еще не пользуются тем вниманием, которого они заслуживают, но при любой попытке продвинуть экономическую теорию они получат очень серьезное значение.

Альтшуль (1928, с. 202/1225) и Шумпетер (1932, с. 241/339) выразили схожее мнение. Вот первый: Борткевич

Один из самых значительных экономистов, который решительно объявил свою точку зрения по основополагающим вопросам экономики. […] *Борткевич заложил основы для построения экономики;* [его труды] *подсказывают многочисленные связи и возбуждают желание дальнейших исследований.*

Позднее он же (наш п. 1.2) указал, что переписка Борткевича с Вальрасом “включала рассмотрение труднейших вопросов экономики”.

И вот Шумпетер: Борткевич

Сохранял знамя экономической теории (исповедуя идеи Маршалла) в то время, и в той стране, когда и где вряд ли кто-либо о ней слышал, и своим мощным мечом расчистил плацдарм для многих битв. Самым большим его достижением является его анализ теоретической структуры марксистской системы […], *– наилучшее исследование из когда-либо написанных о ней, и, кстати, о других ее критиках. Аналогичным шедевром является его статья о теориях ренты (1910а).* […] *В качестве исследователя теории денег и политики по отношению к ним он занимает высокий ранг в ряду немецких авторов. Многим обязаны ему такие темы, как золотой стандарт, банковский кредит и скорость обращения денег. Лучшим, однако, чего он добился в этой области, это его труд об индексных числах (1923 – 1924)* […].

Подробнее других экономические работы Борткевича описал Загоров (1929), см. также выше. В теории денег он (с. 198/11) назвал В. И. "защитником умеренного металлизма против крайнего номинализма" и отметил его интересное исследование проявившейся после первой мировой войны инфляции. Загоров (с. 200 – 201/12) также высоко оценил точку зрения Борткевича на теории Бём-Баверка и Парето, согласился с его возражениями против "безоглядного приложения математики в экономических исследованиях" и указал, что В. И. считал идею предельной полезности ограниченной: из нее "нельзя вывести настоятельно необходимую и единую и полную экономическую теорию".

Особо заметим и опровергнем заключительное утверждение Андерсона (1929, с. 195/9), которое в любом случае не относилось к математике: "В известных отношениях, особенно в начале научной деятельности, Чупрова можно считать учеником Борткевича". Но вот что сам Чупров написал отцу в 1897 г. (Шейнин 1990, с. 26):

Очень большое значение имели для меня […] *сношения с Борткевичем.* […] *Твое участие, твои советы и замечания были мне всегда* […] *живой поддержкой, но не легко было пользоваться ими, да и работал я всё в областях, в которых ты не работаешь.* […] *С Борткевичем же нас связывает общность интересов и близость направлений, мы работаем над одними и теми же вопросами, примыкая к одним и тем же предшественникам.* […] *Переписка с ним полезна и приятна для меня.* […] *Правда, учителем моим* […] *он быть не может – разница знаний* […] *недостаточно велика* […].

Значительно усиливая одно из утверждений Гумбеля (см. выше), мы заключаем, что Борткевич был провозвестником эконометрии; если угодно, – подготовил для нее почву, ср. Прим. 16 в п. 3.2.2.

4.2. Страховая наука. Совсем кратко укажем, что соответствующие работы Борткевича "должны считаться одним из ее наиболее ценных достояний" (Андерссон 1931, с. 219/12). Более подробно свое мнение выразил Лорей (1932, с. 249 – 251, Прим. 9 на с. 251/204 и Прим. 6), который перечислил эти работы, описал его участие в соответствующих конференциях и в работе Немецкого союза страховой науки. В. И. вступил в него примерно в 1902 г., с 1903 г. был членом комитета Союза, а с 1926 г. – главой отделения страховой математики. Весьма положительно оценивает вклад Борткевича в страховую науку и Фрейденберг (1931), но мы не склонны доверять этому автору, см. Прим. 15 в п. 3.1.3.

Гумбель (1931, с. 235/231) особо выделил статьи Борткевича о смертности пенсионеров по инвалидности (1899) и о социальном страховании (1909), ср. сведения о работе Борткевича в пенсионной кассе (п. 1.2), и вполне естественно заметил, что В. И. перешел к страховой науке от изучения статистики населения. Гумбель (1968) также подчеркнул значимость его исследований таблиц смертности.

Статистикой населения Борткевич плодотворно занимался с самого начала своей научной карьеры и, в частности, опубликовал две статьи в *Записках* Петербургской академии наук (1890b; 1891) о смертности и продолжительности жизни. Чуть раньше (1889, с. 1056), а затем и впоследствии (1898a), он, пользуясь более поздними материалами, резко и, видимо, справедливо критиковал таблицы смертности Буняковского, но не отметил, что его предшественник подчеркивал неточность и неполноту своих исходных данных и не был удовлетворен своими результатами (Шейнин 1999, с. 71).

4.3. Теория вероятностей и математическая статистика. Мизес (1932, с. 239/15) заявил, что Борткевич имеет "весьма неплохие заслуги в области прикладной теории вероятностей и математической статистики", но не раскрыл своего утверждения. Повторим (п. 4.1), что его мнение следует воспринимать очень серьезно и лишь заметим, что указанные им дисциплины трудно отделить друг от друга.

Андерсон (1931) назвал Борткевича "одним из крупнейших и в то же время своеобразнейших теоретиков статистики, место которого в одном ряду с Кетле, Лексисом, А. А. Чупровым и К. Пирсоном" и (1932, с. 205/530) "действительно крупным ученым в области математической статистики", "признанным мастером и главой […] [континентального] течения". В дальнейшем он (1957, с. 97) прямо заявил, что старую немецкую математико-статистическую школу создали Лексис, Борткевич и Чупров. О Борткевиче он мог бы добавить аналогичное утверждение по поводу экономики (п. 4.1).

Теория вероятностей была "любимой областью" Борткевича (Альтшуль 1928, с. 202/1225) и (он же 1931, с. 243/1183)

В прикладной теории вероятностей он обладал международной репутацией, проводил необычайно многосторонние и плодотворные исследования и до последнего времени разрабатывал первоочередные проблемы.

Одной из тем Борткевича было исследование приложимости теории вероятностей к статистике и ей он посвятил, в частности, свою брошюру о законе малых чисел (1898b), о котором см. ниже, и энциклопедическую статью (1904a). Непосредственное отношение к математической статистике имели некоторые высоко оцененные экономические статьи В. И., например об индексных числах (1923 – 1924) и о распределении доходов (1930a).

Среди других тем назовем исследование теории серий (1917) и приложение математической статистики к радиоактивности (1913). Последняя монография имеет "непреходящее значение для физики" (Андерсон 1932, с. 207/532), "методологически направляющей монографией" для физиков и заслужившей "серьезное уважение в кругах физиков" (Альтшуль 1928, с. 202/1225 и 1931, с. 245/1183), является "замечательной работой" (Андерсон 1929, с. 192/7).

По мнению Гумбеля (1968, с. 26) несколько трудов Борткевича имели "решающее значение", – монография 1913 г., статья (1921), брошюра (1898b) и исследования экономических схем Маркса (п. 4.1), сам же В. И. был "классиком математической статистики". О законе малых чисел 1898 г. см. ниже; Гумбель, надо сказать, разумно ограничился указанием, что Борткевич внедрил в статистику соответствующие результаты Пуассона. Что же касается статьи 1921 г., то он отметил ее значение для исследования значимости крайних членов вариационных рядов. Мы вполне можем поверить этому, потому что сам Гумбель является автором хорошо известной монографии (1958) на ту же тему.

Одно замечание Андерсона (1929, с. 195/9) представляется существенным, хоть мы и не смогли его подтвердить: Борткевич, как он заявил, "много работал в области […] моральной статистики (к которой относятся не менее 16 из его оригинальных трудов)".

О законе малых чисел мы здесь ничего не скажем, см. наш Комментарий к нему в первой статье ниже.

5. Приложение. Борткевич, Россия, Чупров

5.1. Борткевич и Россия. Со временем Борткевич стал "хорошим немцем" (конец п. 3.2.2), оставаясь, впрочем чужеродным элементом в Германии, но научных связей с Россией не потерял. И вряд ли можно представить себе, как он переносил начало и ход Первой мировой войны.

Почти не повторяясь (Борткевич и Чупров 2005, с. 9 – 12), заметим, что он опубликовал 9 статей на русском языке (последнюю из них – в 1921 г.), 2 немецкие статьи о статистике населения в России (1893b; 1898a), немецкие рецензии на деятельность российского Общества страхования жизни (1910b) и русскую рецензию (1924) на книгу Ирвинга Фишера. Попытка А. А. Кауфмана издать сборник переводов статей Лексиса и Борткевича не удалась, а желание самого В. И. дополнительно опубликовать свой закон малых чисел на русском языке оказалось неосуществимым (п. 3.1.3).

Борткевич находился в переписке с крупными российскими статистиками (п. 3.2.4) и по крайней мере в конце жизни сотрудничал с находящимися в Берлине русскими научными учреждениями (Борткевич и Чупров 2005, с. 10 – 11), а Птуха (там же, с. 10) заявил, что Борткевич принес "колоссальную пользу" России. Одно время Борткевич всерьез подумывал о возвращении в Россию (там же), но подходящих условий для этого не оказалось.

Наконец, в 1899 – 1901 гг. Борткевич преподавал в Александровском лицее, а во время своей работы в пенсионной кассе в Петербурге составил вместе с другим статистиком успешный план государственного страхования рабочих (п. 1.2). Некролога на смерть Борткевича в России, видимо, не появилось, но удивляться этому не следует, см., например Аноним (1927).

5.2. Борткевич и Чупров. Об их научной и личной близости хорошо известно, а лучшим свидетельством этого является их переписка (Борткевич и Чупров 2005). Повторим (конец п. 1.2), что еще А. И. Чупров высоко ценил Борткевича и (п. 3.1.1) что в конце XIX в. Чупров-сын помогал Борткевичу в его исследованиях, требовавших математических знаний, а впоследствии критиковал (по большей части тщетно) композицию статей своего товарища (пп. 3.1.4, 3.1.6). Вообще же в своей переписке они обсуждали вопросы и организационные моменты своей деятельности, личные обстоятельства (состояние здоровья, финансовые проблемы

Чупрова и его поиски преподавательской должности), мнения о российских и немецких статистиках и экономистах. После смерти Чупрова Борткевич опубликовал некролог (1926) в его память, назвав его "навсегда ушедшим боевым товарищем и другом" и отправил письмо его "родственникам". Семь строк из него (Борткевич и Чупров 2005, с. 5) характеризуют их бывшие отношения и испытываемое В. И. чувство безвозвратной потери.

Признательность. Мы благодарны А. Л. Дмитриеву (Петербург) и Г. Раушеру (Вена) за указание некоторых источников и присылку их ксерокопий.

Библиография

Борткевич В. И., Bortkiewicz L. von

(1889), О русской смертности. *Врач*, т. 10, № 48, с. 1053 – 1056.

(1890a), Auseinandersetzung mit Walras. *Rev. d'écon. politique*, t. 4.

(1890b), Смертность и продолжительность жизни мужского православного населения Европейской России. *Зап. Имп. Акад. Наук*, т. 63, Прил. 8. Отдельная пагинация.

(1891), То же название для женского населения. Там же, т. 66, Прил. 3. Отдельная пагинация.

(1892), Über das Moment des Berufes in der preußischen Statistik der Bevölkerungsbewegung. В сборнике *Bericht über die Tätigkeit des statistischen Seminars an der k. k. Univ. Wien im Wintersemester 1892 – 1893*, pp. 13 – 17. Wien.

(1893a), *Die mittlere Lebensdauer* (*Staatswissenschaftliche Studien*, Bd. 4, No. 6). Jena.

(1893b), Russische Sterbetafeln. *Allg. stat. Archiv*, Bd. 3, pp. 23 – 65.

(1894 – 1896, нем.), Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики. В книге Четвериков (1968, с. 55 – 137).

(1897), Несчастные случаи. *Энц. словарь Брокгауза и Ефрона*, полутом 40, с. 925 – 930.

(1898a), Das Problem der Russischen Sterblichkeit. *Allg. stat. Archiv*, Bd. 5, pp. 175 – 190, 381 – 382.

(1898b), *Das Gesetz der kleinen Zahlen.* Leipzig.

(1898c), Die Grenznutzentheorie als Grundlage einer ultraliberalen Wirtschaftspolitik. *Jahrbuch für Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtschaft im Deutschen Reich*, Jg. 22, pp. 1177 – 1216.

(1899), Über die Sterblichkeit der Empfänger von Invalidenrenten vom statistischen und versicherungstechnischen Standpunkte. *Z. für Versicherungs-Recht und Wissenschaft*, Bd. 5, pp. 563 – 605.

(1901), O stopniu dokladnosci spolczynnika rozbieznosci. *Wiedomosci Matematyczne*, t. 5, pp. 150 – 157.

(1903), Теория вероятностей и борьба против крамолы. *Освобождение* (Штутгарт), кн. 1, с. 212 – 219. Статья опубликована в части тиража. Подписано Б.

(1906a), Der Kardinalfehler der Böhm-Bawerkschen Zinstheorie. *Jahrbuch für Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtschaft im Deutschen Reich*, Jg. 30, pp. 943 – 972.

(1906b), War Aristoteles Malthusianer? *Z. für d. ges. Staatswissenschaft*, Bd. 62, pp. 383 – 406.

(1906 – 1907), Wertrechnung und Preisrechnung im Marxschen System. *Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik*, Bd. 23, pp. 1 – 50; Bd. 25, pp. 10 – 51, 445 – 488. Перепечатка: Achenbach, 1976.
(1907), Wie Leibniz die Diskontierungsformel begründete. *Festgaben für W. Lexis*. Jena, pp. 59 – 96.
(1909), Die Deckungsmethoden der Sozialversicherung. *VI Intern. Kongress f. Versicherungs-Wissenschaft*, Bd. 1, pp. 473 – 505.
(1910a), Die Rodbertus'sche Grundrententheorie und die Marx'sche Lehre von der absoluten Grundrente. *Archiv für die Geschichte des Sozialismus und der Arbeiterbewegung*, Bd. 1, pp. 391 – 434.
(1910b), Рецензия на *Изв. Общества страховых знаний*, вып. 1. СПб, 1909. *Z. für die ges. Versicherungs-Wissenschaft*, Bd. 10, pp. 167 – 169.
(1913), *Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen*. Berlin.
(1915), W. Lexis zum Gedächtnis. *Zeitschrift für die ges. Versicherungs-Wissenschaft*, Bd. 15, pp. 117 – 123.
(1917), *Die Iterationen.* Berlin.
(1919), Zu den Grundrententheorie von Rodbertus und Marx. *Archiv für die Geschichte des Sozialismus und der Arbeiterbewegung*, Bd. 8, pp. 248 – 257.
(1921), Variationsbreite und mittlerer Fehler. *Sitz. Ber. Berliner math. Ges.*, Jg. 21, pp. 3 – 11.
(1923 – 1924), Zweck und Struktur einer Preisindexzahl. *Nordisk Statistisk Tidskrift*, Bd. 2, pp. 369 – 408, Bd. 3, pp. 208 – 251, 494 – 516.
(1924), Рецензия на : Fisher I. (1922), *The Making of Index Numbers*. Boston. *Экономич. Вестник*, кн. 3, № 1, с. 221 – 224.
(1926, шведск.), Tschuprow. *Nordisk Statistisk Tidskrift*, Bd. 5, pp. 163 – 166. Перевод в книге Шейнин (2007).
(1930a), Die Disparitätsmasse der Einkommensstatistik. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, t. 25, No. 3, pp. 189 – 298, 311 – 316.
(1930b), *Anwendung der Versicherung auf das Problem der übermäßigen Grundbesitzzerstückelung*. Warschau. На нем. и польск. языках.
(1931), Erwiderung. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, t. 25, No. 3, pp. 311 – 316.

Авторы, чьи статьи о Борткевиче переведены/перепечатаны в нашей книге Шейнин (2007)

Аноним (1927), Борткевич. БСЭ, изд. 1-е, т. 7, с. 198.
Георгиевский П. (1928, франц.), Александр Чупров, 1874 – 1926. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, vol. 23, No. 1, pp. 345 – 349.
Документы (1901 – 1938), Архивные документы Университета им. Братьев Гумбольдт, Берлин.
Загоров С. (1929). Борткевич как экономист. *Тримесячно списание на Главната дирекция на статистиката*, година 1, кн. 1. София, с. 10 – 12.

Мишайков Д. (1929), В. фон Борткевич. *Тримесячно списание на Главната дирекция на статистиката*, година 1, кн. 1. София, с. 5 – 6.

Четвериков Н. С. (1926, франц.), А. А. Чупров, 1874 – 1926. *Metron*, t. 6, No. 3 – 4, pp. 315 – 320.

Altschul E. (1928), L. v. Bortkiewicz. *Magazin der Wirtschaft*, 4. Jg, No. 31, pp. 1225 – 1226.

--- (1931), Ladislaus v. Bortkiewicz. Там же, 7. Jg, No. 30, pp. 1183 – 1184.

Anderson O., Андерсон О. (1929), Професcор В. Борткевич. *Тримесячно списание на Главната дирекция на статистиката*, година 1, кн. 1. София, с. 7 – 9.

--- (1931), Профессор В. И. Борткевич как статистик. *Россия и славянство*, 15 авг. 1931, с. 3.

--- (1932), Ladislaus von Bortkiewicz. *Z. f. Nationalökonomie*, Bd. 3, pp. 242 – 250. Перепечатка: *Ausgew. Schriften*, Bd. 2. Редактор H. Strecker. Tübingen, 1963, pp. 530 – 538.

Andersson T. (1931), Ladislaus von Bortkiewicz, 1868 – 1931. *Nordic Statistical Journal*, vol. 3, pp. 9 – 26; *Nordisk Statistisk Tidskrift*, Bd. 10, pp. 1 – 16.

Freudenberg K. (1931), Ladislaus von Bortkiewicz. *Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete. Beilage zur Z. für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft*, Bd. 2, No. 4, pp. 123 – 126.

Gumbel E. J. (1931), Ladislaus von Bortkiewicz. *Deutsches statistisches Zentralblatt*, No. 8, pp. 231 – 236.

Lorey W. (1932), Ladislaus von Bortkiewicz. *Versicherungsarchiv*, Bd. 3, pp. 199 – 206.

Meerwarth R. (1936), Ladislaus von Bortkiewicz, 1868 – 1931. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, t. 26, No. 1, pp. 254 – 258. Доклад 1931 г.

Mises R. von (1932), Ladislaus von Bortkiewicz. *Chronik der Friedrich-Wilhelm Univ. zu Berlin*, 1931/1932, pp. 14 – 15.

Schumacher H. (1931), Ladislaus von Bortkiewicz. Gedächtnisrede. *Allg. stat. Archiv*, Bd. 21, pp. 573 – 576.

Schumpeter Jos. A. (1932), Ladislaus von Bortkiewicz (Aug. 7, 1868 – July 15, 1931). *Econ. J.*, vol. 42, pp. 338 – 340.

Иные авторы

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926).* Берлин. Также www.sheynin.de

Борткевич И. И. (1872), *Алгебра для гимназий с 1200 задачами и примерами*. СПб. Рецензия: П. Л. Чебышев, *Полн. собр. соч.*, т. 5, М. – Л., 1951, с. 382 – 386.

Виттих К., Раушер Г., Шейнин О. Б. (2007), Переписка Е. Е. Слуцкого и В. И. Борткевича. *Финансы и бизнес*, № 4

Колмогоров А. Н. (1954), Малых чисел закон. БСЭ, 2-е изд., т. 26, с. 169. Заметка опубликована анонимно, о ее авторстве сообщил, например, Ширяев (1989, с. 104).

Покотилов А. Д. (1909), *Первый опыт государственного страхования в России. Десять лет пенсионной кассы служащих на казенных железных дорогах по операциям страхования жизни*. СПб. Рецензия: W. Idelson, *Z. für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft*, Bd. 10, 1910, p. 169.

Старовский В. Н. (1933), Экономическая статистика. БСЭ, 1-е изд., т. 63, с. 279 – 283.

Фортунатов А. (1914), Памяти П. Д. Азаревича. *Статистич. Вестник*, № 1 – 2, с. 233 – 238.

Четвериков Н. С., составитель и переводчик (1968), *О теории дисперсии*. М.

Чупров А. А. (1909), *Очерки по теории статистики*. СПб. Последующие издания: 1910 и 1959.

--- (1912), Борткевич. *Нов. энц. словарь Брокгауза и Ефрона*, т. 7, с. 647. Подписано Ч.

Шейнин О. Б. (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка.* М.

--- (1999), О работах В. Я. Буняковского по теории вероятностей. *Историко-математич. исследования*, вып. 4 (39), с. 57 – 81.

--- (2002), Теория статистики: исторический эскиз. *Вопросы статистики*, № 2, с. 64 – 69.

--- (2003), *Гумбель, Эйнштейн и Россия.* М. Текст на англ. и русск. языках. Только на англ. яз.: www.sheynin.de

--- , составитель и переводчик (2007), *Четвертая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также под названием Борткевич и Чупров, *Статьи авторов* и т. д.: www.sheynin.de

Anderson O. (1957), *Methodenlehre in den Sozialwissenschaften.* Würzburg. Третье изд. Четвертое изд.: 1962.

Charasoff G. von (1910), *Das system des Marxismus.* Berlin.

Gini C. (1912), Variabilità e mutabilità. Contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche. *Studio Economico-Giuridici. Univ. Cagliari*, t. 3.

Gumbel E. J. (1958, англ.), *Статистика экстремальных значений.* М., 1965.

--- (1968), Ladislaus von Bortkiewicz. В книге Kruskal W. H., Tanur Judith M., редакторы. *Intern. Enc. of Statistics*, vol. 1. New York, 1978, pp. 24 – 27.

Hald A. (2002), *On the History of Series Expansions of Frequency Functions and Sampling Distributions, 1873 – 1944. Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Roy. Danish Acad. of Sci. & Letters*, Mat.-Fys. Meddelelser No. 49, 88 pp.

Jaffé W., редактор (1965), *Correspondence of Leon Walras and related papers*, vols 2 – 3. Amsterdam.

Kendall M. G., Doig Alison G. (1968), *Bibliography of Statistical Literature pre 1940*. Edinburgh – London.

Keynes J. M. (1921), *Treatise on Probability*. Перепечатка: *Coll. Works*, vol. 8. London, 1973.

Klimpt W. (1936), *Mathematische Untersuchungen im Anschluss an L. von Bortkiewicz über Reproduktion und Profitrate.* Berlin. Диссертация 1930/1931 г.

Tönnies F. (1932), Ladislaus v. Bortkiewicz, 1868 – 1931. Перепечатка: *Gesamtausgabe*, Bd. 22. Berlin, 1998, pp. 315 – 319.

Tugan-Baranovky M., Туган-Барановский М. И. (1905), *Theoretischen Grundlagen der Marxismus*. Leipzig. Четыре сокращенных русских изданий: *Теоретические основы марксизма*. СПб и Москва, 1905 – 1906.

Voigt G. (1994), *Russland in die deutschen Geschichtsschreibung 1843 – 1945.* Berlin.

Winkler W. (1931), Ladislaus von Bortkiewicz als Statistiker. *Schmollers Jahrbuch f. Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtschaft im Deutschen Reiche*, 55. Jg, pp. 1025 – 1033.

Woytinsky W. S. (1961), *Stormy Passage*. New York.

О. Б. Шейнин

I. Закон малых чисел

Das Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig, 1898

Предисловие

Предлагаемая работа является первой попыткой ближе рассмотреть статистические ряды, состоящие из малых абсолютных [не относительных] чисел с точки зрения теории вероятностей. […] Подробные статистические данные нашего времени действительно содержат много примеров таких статистических рядов, которые однако, до сих пор заслуживали едва лишь беглого взгляда научной статистики и притом по той причине, что при столь малых числах слишком сильно проявляется действие случайных причин. Нередко из двух непосредственно следующих одно за другим чисел одно многократно превосходит другое, и соотношение одного к другому, когда последнее в точности равно нулю, становится бесконечным. А поскольку любое статистическое заключение основывается на предпосылке уравновешивания действия случайных причин, то полагают, что эти малые числа сами по себе явно бесполезны.

Если исследуются те стороны явлений, которые полагаются до некоторой степени не зависящими от действия случайных причин, низкая оценка малых чисел представляется полностью обоснованной. Но это не так, когда исследуются именно законы случая в статистических данных, т. е. проверяется, приложимы ли к статистике понятия и положения теории вероятностей. В таком случае основное методологическое предложение любой опытной науки требует, чтобы условия испытаний неизменно допускали проявление действия исследуемых факторов.

Эта мысль руководила мной в моей работе, чье математическое обоснование является предметом первой главы. Во второй главе на основе выведенных формул сделана попытка пролить свет теории вероятностей на некоторые статистические данные о самоубийствах и несчастных случаях, которые представлены рядами малых чисел. Оказалось, что найденные в исследуемых рядах колебания почти полностью соответствуют предсказаниям теории, и именно в этом состоит закон малых чисел.

Теперь следует привести в соответствие этот результат, благоприятный для приложения теории вероятностей к статистике, с другим, который представляется неблагоприятным и состоит в том, что за исключением редких случаев большие числа появления [исследуемого] события или выведенных из них статистических соотношений заведомо не желают подчиняться формулам пуассонова закона больших чисел. Здесь мы в несколько иной форме в основном следовали обоснованию теории избыточных ошибок по одной статье Лексиса, и этому посвящена глава третья. И мы настойчиво предупреждаем против смешивания основных для этой теории схем переменной вероятности со случаем переменных шансов у Пуассона.

Теория избыточных ошибок представляет средство для выяснения кажущегося противоречия между поведением больших и малых чисел появления события. В сочетании с приведенными в гл. 2 фактами она дает также возможность подкрепить мысль о том, что статистические числа являются результатом определенных общих условий появления события, при которых играют роль случайные причины и таким образом снова показать в выгодном свете те представления об особой статистической закономерности, которые ввиду ошибок Кетле и его последователей почти полностью видимо утеряли доверие к себе.

Читатель может быть решит, что основа, на которой я желаю установить следствие столь серьезного характера, недостаточно широко и прочно, и об этом можно в конце концов спорить. Но пусть мой небольшой труд, который я сейчас представляю общественности, живительно воздействует на прикладную теорию вероятностей и поможет заинтересовать этой областью науки более широкие круги. И этому должен послужить выпуск моей работы в виде отдельной брошюры.

Глава 1. Вывод некоторых формул теории вероятностей в предположении бесконечно большого числа испытаний [Бернулли] и бесконечно малой вероятности появления события в них

1. Пусть вероятность появления некоторого определенного события A равна p и $q = 1 - p$ – вероятность его ненаступления в единичном испытании. Тогда

$$\frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x!}p^x q^{n-x} \tag{1.1}$$

окажется вероятностью появления A x раз в n испытаниях. Если n возрастает до бесконечности, а p убывает до нуля, и притом так, что $np = m$ остается неизменным, то выражение (1.1) будет стремиться к предельному значению

$$w_x = \frac{m^x e^{-m}}{x!}, \tag{1.2}$$

ср. Пуассон (1837, § 81, с. 205 – 207). Эта формула предполагает, что x мало по сравнению с n.

Величина m, которая в соответствии со своим смыслом должна быть положительна, может быть как целым числом, так и дробью, правильной или неправильной, выражает математическое ожидание числа случаев появления события A в n испытаниях, см. формулу (5) в Приложении 1. Она в то же время связана с целым числом μ таким образом, что $m - 1 \le \mu \le m$, а среди вероятностей

$$w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots \tag{1.3}$$

наивысшей является w_μ.
Из (1.2) можно вывести

$$w_x = (m/x)w_{x-1}, \tag{1.4}$$

откуда следует, что w_x возрастает до тех пор, пока $x > m$. Если m целое число, то w_x будет иметь два максимальных значения, w_{m-1} и w_m. Если же, напротив, m выражается дробью, w_x достигает максимальной величины при значении x между $(m - 1)$ и m. И появление события A при μ испытаниях из n оказывается вероятнейшим результатом серии испытаний.

Принято называть разность $(x - m)$ погрешностью результата x. Математическое ожидание этой ошибки равно нулю, см. формулу (9) Приложения 1, но математическое ожидание абсолютного значения той же ошибки будет иным. Обозначим эту величину, которая также называется средней арифметической ошибкой величины x, через α. И поскольку математическое ожидание положительной ошибки x равно математическому ожиданию такой же отрицательной ошибки, то для вычисления α можно просто удвоить последнее:

$$\alpha = 2\sum_{x=0}^{\mu} (m - x)w_x.$$

Из (1.4) следует, однако,

$$xw_x = mw_{x-1}$$

и потому

$$\alpha = 2m\Big(\sum_{x=0}^{\mu} w_x - \sum_{x=1}^{\mu} w_{x-1}\Big) = 2mw_\mu \text{ или } \alpha = \frac{2e^{-m}m^{\mu+1}}{\mu!}. \tag{1.5, 1.6}$$

Средняя квадратическая ошибка величины x, которую мы будем обозначать через $\varepsilon(x)$, является квадратным корнем из математического ожидания $(x - m)^2$. Обозначая теперь математическое ожидание a через $\mathrm{E}a$, мы получаем

$$\mathrm{E}(x - m)^2 = \varepsilon^2(x).$$

По формуле (10) Приложения 1 оно соответствует допущению бесконечно малого p и $q = 1$. И таким образом

$$\varepsilon^2(x) = m,\ \varepsilon(x) = \sqrt{m}. \tag{1.7, 1.8}$$

2. Следует показать, каким образом можно приближенно определить m апостериорно. Для этой цели примем, что имеется σ серий бесконечного количества испытаний и что неизвестное математическое ожидание числа появлений события A в каждой из них одно и то же и притом равно некоторому z. Примем, далее, что из σ серий в l_0 сериях A появилось 0 раз; в l_1 сериях – 1 раз; в l_2 сериях – 2 раза и т. д.

Для вероятности указанного составного события получим выражение

$$\frac{[\exp(-z)]^{l_0}\ [z\exp(-z)]^{l_1}\ [z^2\exp(-z)]^{l_2}\ [z^3\exp(-z)]^{l_3}\ldots}{(1)^{l_1}(2!)^{l_2}(3!)^{l_3}\ldots}. \qquad (1.9)$$

Если, напротив, исходить из того, что упомянутое составное событие действительно имело место, то, в предположении, что до испытаний все значения z были равновероятны, для вероятности $\Omega(z)dz$ искомого математического ожидания содержаться в интервале z, $z + dz$ получим выражение

$$\Omega(z)dz = C\exp[-z(l_0 + l_1 + l_2 + \ldots)]\ z^{l_1+2l_2+3l_3+\ldots}\ dz.$$

Здесь C – пока неизвестная константа. Сразу же ясно, что

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \ldots = s \qquad (1.10)$$

есть ни что иное, как число испытаний, при которых появилось событие A во всех σ сериях. Вероятнейшее значение z найдется из условия

$$\Omega(z) = Ce^{-\sigma z}z^s = \max \text{ или } d\Omega(z)/dz = C(-\sigma e^{-\sigma z}z^s + e^{-\sigma z}sz^{s-1}) = 0.$$

Оказывается, что

$$-\sigma z + s = 0,\ z = s/\sigma.$$

Соответственно, чтобы определить приближенное значение m, следует разделить число всех случаев, при которых событие A появилось, на число серий. В дальнейшем мы обозначим $s/\sigma = m'$. Для определения C служит уравнение

$$I = \int_0^\infty \Omega(z)dz = \int_0^\infty Ce^{-\sigma z}z^s dz = 1.$$

Положим $\sigma z = y$, тогда

$$I = (1/\sigma^{s+1})\int_0^\infty Ce^{-y}y^s dy = \Gamma(s+1)/\sigma^{s+1},\ C = \sigma^{s+1}/\Gamma(s+1).$$

Далее,

$$\Omega(z) = \frac{\sigma^{s+1}}{\Gamma(s+1)}e^{-\sigma z}z^s = \frac{e^{-\sigma z}(\sigma z)^s\sigma}{s!},\ \Omega(m') = \frac{e^{-s}s^s\sigma}{s!}, \qquad (1.11)$$

$$\Omega(z) = \Omega(m')\ [e^{-(z-m')}(z/m')^{m'}]^\sigma. \qquad (1.12)$$

При соответствующих обстоятельствах мы будем пользоваться последними формулами.

3. Среднюю арифметическую и среднюю квадратическую ошибки среднего значения $m' = s/\sigma$ можно получить, если мысленно объединить все σ серий испытаний и соответственно полагать, что s

– единый результат. Тогда по формуле (1.6) в качестве средней квадратической ошибки s мы получим выражение,

$$\frac{2e^{-\sigma m}(\sigma m)^{M+1}}{M!},$$

в котором M определяется из неравенств или равенств

$$\sigma m - 1 \le M \le \sigma m.$$

Обозначив среднюю арифметическую ошибку m' через α_0, мы, очевидно, получим ее, разделив выведенное выражение на σ:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sigma}\,\frac{2e^{-\sigma m}(\sigma m)^{M+1}}{M!}. \quad (1.13)$$

Вполне аналогично на основании формулы (1.8) выводится средняя квадратическая ошибка среднего значения m':

$$\varepsilon(m') = \frac{1}{\sigma}\sqrt{m\sigma} = \sqrt{m/\sigma}. \quad (1.14)$$

Полученная формула означает, что эта ошибка, выведенная из большого числа серий испытаний, обратно пропорциональна корню квадратному из него и поэтому приближается к граничному значению 0 с возрастанием количества серий.

4. Выше было показано, каким способом и с какой степенью точности может быть найдено математическое ожидание x. Теперь можно аналогично рассмотреть среднюю квадратическую ошибку этой величины. Есть два различных способа определять ее приближенное значение, чье точное значение, доставляемое формулой (1.8), не может быть вычислено ввиду неизвестности m. Первый, косвенный способ состоит в том, чтобы в упомянутой формуле заменить неизвестное m его вероятнейшим значением m', что приводит к

$$\varepsilon'(x) = \sqrt{m}. \quad (1.15)$$

Второй или прямой способ непосредственно исходит из определения понятия величины

$$\varepsilon(x) = [(0-m)^2 w_0 + (1-m)^2 w_1 + (2-m)^2 w_2 + \ldots]^{1/2}.$$

Неизвестные вероятности (1.3) заменяются их вероятнейшими значениями w'_0, w'_1, w'_2, …, полученными из испытаний. В обозначениях п. 2 будет

$$w'_0 = l_0/\sigma,\ w'_1 = l_1/\sigma,\ w'_2 = l_2/\sigma,\ \ldots$$

Итак, вычисленная по прямому способу средняя квадратическая ошибка x будет равна

$$\varepsilon''(x) = \{(1/\sigma)[(0-m)^2 l_0 + (1-m)^2 l_1 + (2-m)^2 l_2 + \ldots]\}^{1/2}$$

или же

$$\varepsilon''(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma}}\,, \tag{1.16}$$

где под x_i понимаются действительно полученные числа в отдельных сериях. Формулу (1.2) нельзя, однако, применять при неизвестном m, и обычно

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma} \text{ заменяют на } \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1}.$$

Математические ожидания обеих этих величин совпадают и по существу легко доказать, что оба они равны m, ибо

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma} - \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m')^2}{\sigma} = (m' - m)^2.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\Big[\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma} - (m' - m)^2\Big]$$

и, переходя к математическим ожиданиям, имеем

$$\mathrm{E}\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}[m - (m/\sigma)] = m.$$

Итак, прямой способ приходится применять в виде

$$\varepsilon''(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1}}\,. \tag{1.17}$$

Теперь спрашивается, какой из двух способов, косвенный или прямой, обеспечивает более точные результаты, т. е. такие, которые по своему математическому ожиданию менее отклоняются от $\varepsilon(x)$. Чтобы ответить на этот вопрос, следует определить две величины, средние квадратические ошибки величин $\varepsilon'(x)$ и $\varepsilon''(x)$, которые мы обозначаем через $\varepsilon[\varepsilon'(x)]$ и $\varepsilon[\varepsilon''(x)]$, и сравнить их.

Вначале мы определим среднюю квадратическую ошибку квадратов $\varepsilon[\varepsilon'(x)]^2$ и $\varepsilon[\varepsilon''(x)]^2$. По формулам (1.14) и (1.15) мы имеем

$$\varepsilon[\varepsilon'(x)]^2 = \sqrt{m/\sigma}\,. \tag{1.18}$$

Для определения $\varepsilon[\varepsilon''(x)]^2$ используем формулу (1.16). Выражение для средней квадратической ошибки квадрата ошибки x имеет вид

$$\varepsilon[(x - m)^2] = \{[(0 - m)^2 - m]^2 w_0 + [(1 - m)^2 - m]^2 w_1 + \ldots\}^{1/2} =$$
$$[(0 - m)^4 w_0 + (1 - m)^4 w_1 + \ldots - m^2]^{1/2}.$$

Подставив теперь в формулу (12) Приложения 1 $q = 1$ или $p = 0$, получим

$$(0 - m)^4 w_0 + (1 - m)^4 w_1 + \ldots = 3m^2 + m$$

и поэтому

$$\varepsilon[(x - m)^2] = \sqrt{2m^2 + m}\,.$$

Далее, по теореме о средней квадратической ошибке суммы нескольких не зависящих друг от друга величин,

$$\varepsilon\,[\sum_{i=1}^{\sigma}\ (x_i - m)^2] = \sqrt{\sigma(2m^2 + m)}$$

и, наконец,

$$\varepsilon\,[\sum_{i=1}^{\sigma}\ \frac{1}{\sigma}(x_i - m)^2] = \sqrt{(2m^2 + m)/\sigma}\,. \tag{1.19}$$

Поскольку левая часть последнего уравнения равна $\varepsilon[\varepsilon''(x)]^2$, то, разделив (1.19) на (1.18), имеем

$$\sqrt{2m+1}\,. \tag{1.20}$$

Из (1.20) следует, что при определении средней квадратической ошибки величины x прямой способ всегда приводит к большей средней квадратической ошибке квадрата искомой величины, чем косвенный способ. С точки зрения точности второй способ поэтому предпочтительнее. Прямой способ становится тем менее относительно надежным, чем больше m. Но нельзя упускать из вида, что при произведенном исследовании $\varepsilon''(x)$ вычислено по формуле (1.16), на практике же, однако, применяется формула (1.17), которая незначительно, правда, уступает первой по точности. В этом отношении формула (1.20) сохраняет преимущество косвенного метода перед прямым, указывая скорее меньшее, чем большее количество.

В заключение покажем ещё, как можно приближенно определить средние квадратические ошибки $\varepsilon'(x)$ и $\varepsilon''(x)$ по найденным средним квадратическим ошибкам их квадратов. Если ε – средняя квадратическая ошибка некоторой величины X, математическое ожидание которой равно X_0, то можно определить среднюю квадратическую ошибку другой величины, $f(X)$, зависящей от первой, произведением

$$\varepsilon df(X)/dX_{X=\mathrm{X}_0}\,.$$

Применив этот метод к нынешнему случаю, получим из (1.18) и (1.19)

$$\varepsilon[\varepsilon'(x)] = \frac{1}{2\sqrt{m}}\sqrt{m/\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\,, \tag{1.21}$$

$$\varepsilon[\varepsilon''(x)] = \frac{1}{2\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2m^2+m}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2\sqrt{\sigma}}. \qquad (1.22)$$

Следует всегда иметь в виду, что обе последние формулы приближенные. На практике лучше их не применять и по возможности использовать формулы (1.18) и (1.19).

В самом общем виде мы здесь обращаем внимание на то, что в формулах (1.18), (1.19), (1.20) и (1.22), равно как и в формулах (1.13) и (1.14), поскольку они предназначены для практики, входящие в них величины m заменяются их вероятнейшим значением m', найденным из наблюдений.

5. Рассмотрим теперь случай, часто встречающийся на практике. Пусть задан не один ряд серий испытаний, а, например, ν рядов, которые служат для определения стольких же величин, а именно математических ожиданий числа испытаний

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \qquad (1.23)$$

при которых в соответствующих сериях появляется случайное событие. Каждый ряд состоит из σ серий, а число испытаний в каждой серии бесконечно. Пусть x_{ij} будет результатом i-й серии в j-м ряду, так что полученные данные будут иметь вид, показанный в следующей таблице

$$\begin{array}{l} x_{11},\ x_{21},\ x_{31},\ \ldots\ x_{\sigma 1} \\ x_{12},\ x_{22},\ x_{32},\ \ldots\ x_{\sigma 2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1\nu},\ x_{2\nu},\ x_{3\nu},\ \ldots\ x_{\sigma\nu} \end{array}$$

Обозначим еще

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + \ldots x_{\sigma j} = s_j \text{ и } s_j/\sigma = m_j'.$$

Я специально указываю, что величины (1.23) никак не связаны друг с другом. Принято считать

$$\sqrt{\frac{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}}{n}}$$

средним квадратическим величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Определим теперь среднее квадратическое средних квадратических ошибок величин x_{ij}, соответствующих первой, второй, … строкам приведенной таблицы. Пусть эти ошибки обозначены $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_\nu(x)$, а искомое среднее квадратическое $\varepsilon_0(x)$. Из формулы (1.7) имеем

$$\varepsilon_j(x) = \sqrt{m_j},\ \varepsilon_0(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\nu} m_j / \nu}.$$

Таково точное значение определяемой величины. Ему соответствуют два приближенных значения, $\varepsilon_0'(x)$ и $\varepsilon_0''(x)$, получаемые по косвенному и прямому способам, см. формулы (1.15) – (1.17).

Мы имеем

$$\varepsilon_0'(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\nu} m_j' / \nu} = \sqrt{\frac{\sum s}{\nu\sigma}}, \tag{1.24}$$

$$\varepsilon_0''(x) = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\sigma}\frac{(x_{ij}-m_j)^2}{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\sigma}\frac{(x_{ij}-m_j')^2}{\sigma-1}} = \tag{1.25}$$

$$\sqrt{\frac{\sum x^2 - (1/\sigma)\sum s^2}{\nu(\sigma-1)}}. \tag{1.26}$$

Первая сумма распространяется на все элементы x_{ij}, а вторая – на все s_j.

В соответствии с формулой (1.25) средние квадратические ошибки величин $[\varepsilon_0'(x)]^2$ и $[\varepsilon_0''(x)]^2$ равны

$$\varepsilon[\varepsilon_0'(x)]^2 = \frac{1}{\nu}\sqrt{\sum_{j=1}^{\nu}\frac{m_j}{\sigma}},\ \varepsilon[\varepsilon_0''(x)]^2 = \frac{1}{\nu}\sqrt{\sum_{j=1}^{\nu}\frac{m_j(2m_j+1)}{\sigma}}, \tag{1.27, 1.28}$$

см. формулы (1.18) и (1.19). Формулам (1.21) и (1.22) здесь соответствуют

$$\varepsilon[\varepsilon_0'(x)] = \frac{1}{2\sqrt{\nu\sigma}},\ \varepsilon[\varepsilon_0''(x)] = \frac{1}{2\sqrt{\nu\sigma}}\sqrt{\frac{2\sum m_j^2}{\sum m_j}+1}. \tag{1.29, 1.30}$$

Практически, поскольку величины m_j не заданы, их приходится заменять значениями $m_j' = s_j/\sigma$, а не непосредственно применять формулы (1.27), (1.28) и (1.30). Таким образом, вместо величин ε мы получаем соответствующие ε′:

$$\varepsilon'[\varepsilon_0'(x)]^2 = \frac{1}{\nu\sigma}\sqrt{\sum s},\ \varepsilon'[\varepsilon_0''(x)]^2 = \tag{1.31}$$

$$\frac{1}{\nu\sigma}\sqrt{(2/\sigma)\sum s^2 + \sum s}, \tag{1.32}$$

$$\varepsilon'[\varepsilon_0''(x)] = (1/2)\sqrt{\frac{(2/\sigma)\sum s^2 + \sum s}{\nu\sigma\sum s}}. \tag{1.33}$$

6. Здесь мы покажем на некоторых числовых примерах, что формула (1.2) оказывается применимой и обеспечивает хорошее приближение также в случаях, при которых n и p, не будучи соответственно бесконечным и бесконечно малым, являются достаточно большим (малым).

В последующих таблицах столбцы 1 указывают значения x в обозначениях п. 1 и следующих, столбцы 2 – 4 – значения выражения (1.1) для соответствующих x при указанных в заглавии таблиц n и p. Столбец 5 вычислен по формуле (1.2) и каждому примеру соответствует свое значение произведения $np = m$.

1. $m = 0,5$

x	(n = 1000, p = 0,0005.)	(n= 10000, p = 0,00 005.)	(n == 100 000, p = 0,000 005.)	(lim. $n = \infty$, lim. p = 0.)
1	2	3	4	5
0	•60 645	•60 653	•60 653	•60 653
1	•30 338	•30 328	•30 327	•30 327
2	•07 581	•07 582	•07 582	•07 582
3	•01 262	•01 263	•0l 264	•01 264
4	•00 157	•00 158	•00 158	•00 158
5	•00 016	•00 016	•00 016	•00 016
6	•00 001	•00 001	•00 001	•00 001

2. $m = 2$

x	(n = 1000, p = 0,002.)	(n = 10 000, p = 0,0002.)	(n = 100 000, p = 0,00 002.)	(lim. $n = \infty$, lim. p = 0.)
1	2	3	4	5
0	•13 506	•13 531	•13 533	•13 533
1	•27 067	•27 067	•27 067	•27 067
2	•27 095	•27 070	•27 068	•27 067
3	•18 063	•18 046	•18 045	•18 044
4	•09 023	•09 022	•09 022	•09 022
5	•03 602	•03 608	•03 609	•03 609
6	•01 197	•01 202	•01 203	•01 203
7	•00 341	•00 343	•00 344	•00 344
8	•00 085	•00 086	•00 086	•00 086
9	•00 019	•00 019	•00 019	•00 019
10	•00 004	•00 004	•00 004	•00 004
11	•00 001	•00 001	•00 001	•00 001

3. $m = 5$

X	(n =• 1000, p = 0,005)	(n=10000, p = 0,0005.)	(n = 100 000, p = 0,00 002.)	(lim. $n = \infty$, lim. p = 0.)
1	2	3	4	5
0	•00 665	•00 673	•00 674	•00 674
1	•03 344	•03 366	•03 369	•03 369
2	•08 393	•08 419	08 422	•08 422
3	•14 030	•14 036	•14 037	•14 037
4	•17 573	•17 549	•17 547	•17 547
5	•17 591	•17 551	•17 547	•17 547
6	•14 659	•14 626	•14 623	•14 622
7	•10 460	•10 446	•10 445	•10 445
8	•06 525	•06 526	•06 528	•06 528
9	•03 614	•03 625	•03 627	•03 627
10	•01 800	•0l 812	•01813	•01813
11	•00 814	•00 823	•00 824	•00 824
12	•00 337	•00 343	•00 343	•00 343
13	•00 129	•00 132	00 132	•00 132
14	•00 046	•00 047	•00 047	•00 047
15	•00 015	•00 016	•00 016	•00 016
I6	•00 005	•00 005	•00 005	•00 005
17	•00 001	•00 001	•00 001	•00 001

4. $m = 10$.

X	(n = 1000, p = 0,01.)	(n = 10 000, (p = 0,001.)	(n= 100 000, p= 0,0001.)	(lim. $n = \infty$, lim. p = 0.)
1	2	3	4	5
0	•00 004	•00 005	•00 005	•00 005
1	•00 044	•00 045	•00 045	•00 045
2	•00 220	•00 226	•00 227	•00 227
3	•00 739	•00 755	•00 757	•00 757
4	•01 861	•01 889	•01 891	•01 892
5	•03 745	•03 780	•03 783	•03 783
6	•06 274	•06 302	•06 305	06 306
7	•08 999	•09 007	•09 008	•09 008

8	•11 283	•11 262	•11 261	•11 260
9	•12 561	•12 516	•12 512	•12 511
10	•12 574	•12 518	•12 512	•12 511
11	•11 431	•11 380	•11 375	•11 374
12	•09 517	•09 482	•09 479	•09 478
13	•07 306	•07 293	•07 292	•07 291
14	•05 203	•05 207	•05 208	•05 208
15	•03 454	•03 467	•03 472	•03 472
16	•02 148	•02 168	•02 170	•02 170
17	•01 256	•01 274	•01 276	•01 276
18	•00 693	•00 708	•00 709	•00 709
19	•00 362	•00 372	•00 373	•00 373
20	•00 179	•00 186	•00 187	•00 187
21	•00 084	•00 088	•00 089	•00 089
22	•00 038	•00 040	•00 040	•00 040
23	•00 016	•00 017	•00 018	•00 018
24	•00 007	•00 007	•00 007	•00 007
25	•00 003	•00 003	•00 003	•00 003
26	•00 001	•00 001	•001	•00 001

[Автор приводит здесь таблицу значений функции (1.1) каждое выбранное им значение *m* оказывалось одним и тем же произведением изменяющихся сомножителей.]

7. В прикладной теории вероятностей обычно стараются избегать применения формулы (1.1), поскольку это связано с весьма канительными вычислениями. Напротив, предпочитают формулу

$$(h/\sqrt{\pi})\int_{u_1}^{u_2}\exp(-h^2u^2)du \qquad (1.34)$$

для вероятности величине x находиться в пределах u_1 и u_2. Константа h, мера точности, определяется из уравнения

$$(1/2h^2) = npq. \qquad (1.35)$$

Подставив в (1.34) $u_1 = -\alpha/h$, $u_2 = \alpha/h$ и $hu = t$, мы получим для вероятности x быть не меньше, чем $np - \alpha/h$ и не больше, чем $np + \alpha/h$, хорошо известное выражение

$$(2/\sqrt{\pi})\int_0^{\alpha}\exp(-t^2)dt. \qquad (1.36)$$

Формулы (1.34) и (1.36) являются приближенными и лишь при определенных условиях они обеспечивают результаты, незначительно отличающиеся от тех, которые предоставляет строгая формула (1.1). Эти условия обычно формулируются следующим образом: n должно быть большим числом, равным нескольким тысячам, а p и q не должны быть слишком малы, причем здесь часто отсутствуют точные количественные указания.

Теперь легко показать, что по существу дело идет не о двух отдельных условиях, а об одном-единственном, и состоит оно в том, что произведение npq должно достигать определенного значения, ибо только в случае, когда p или q бесконечно мало, а произведение npq, т. е. m соответственно бесконечно велико, можно действительно применять формулы (1.34) и (1.36) вместо формулы (1.2), которую при этих условиях следует считать точной.

Если x так велико, что допустимо применять формулу Стирлинга для факториала x! в знаменателе (1.2), то тогда

$$w_x = \left[\frac{m}{x}\right]^x \frac{e^{x-m}}{\sqrt{2\pi x}} = \left[\frac{m}{x}\right]^{x+(1/2)} \frac{e^{x-m}}{\sqrt{2\pi m}}.$$

Положив $x = m + u$, $(u/m) = \delta$
и применив разложение

$$\ln (1 + \delta) = \delta - (\delta^2/2) + (\delta^3/3) - (\delta^4/4) + \ldots,$$

легко получить

$$w_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \exp \{- [(u/2!) + (1/2)]\delta +$$
$$[(u/2 \cdot 3) + (1/2 \cdot 2)]\delta^2 - [(u/3 \cdot 4) + (1/2 \cdot 3)\delta^3] + \ldots\}. \qquad (1.37)$$

Если δ – такая малая дробь, что члены, содержащие δ^2, δ^3, … могут быть с полным правом отброшены, – а при достаточно больших m практически встречаются только такие значения w_x, при которых это условие выполняется, – то

$$w_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \exp [-\frac{u(u+1)}{2m}]. \qquad (1.38)$$

Если при этом u достаточно велико, то получаемые при этом величины w_x не будут значительно отличаться от значений

$$w_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \exp [-\frac{u^2}{2m}]. \qquad (1.39)$$

Соотношение между (1.39) и (1.34) очевидно. Поскольку в данном случае $(1/2h^2) = m$, то эти формулы должны приводить к почти совпадающим результатам. Если желательно проверить последнее утверждение на численных примерах, то следует количественно учесть, что формула (1.34) основана на допущении непрерывно изменяющегося u, тогда как при выводе формулы (1.39) мы не уклонились от того условия, что u принимает только такие значения, при которых $(m + u)$ – целые числа.

8. Существует предложение, противоположное теореме, которая означает, что при заданной вероятности p вероятность величине x находиться в определенных границах выражается формулой (1.34). Оно утверждает, что если в n испытаниях событие A появилось m' раз и не произошло $(n - m')$ раз, то неизвестное np будет находиться в пределах $(m' + v')$ и $(m' + v'')$ с вероятностью

$$\frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{v'}^{v''} \exp [- ß^2 v^2] dv, \ (1/2ß^2) = n(m'/n)[1 - (m'/n)]. \qquad (1.40, 1.41)$$

Если же вместо одной серии n испытаний имеется σ таких серий, в которых событие A появилось s раз, то вероятность величине σnp находиться в пределах $(s + v'\sigma)$ и $(s + v''\sigma)$ будет очевидно равна

$$\frac{\beta_0}{\sqrt{\pi}}\int_{v'\sigma}^{v''\sigma} \exp\,[-\beta_0^2(v\sigma)^2]d(v\sigma),\ (1/2\beta_0^2) = \sigma n(s/\sigma n)[1-(s/\sigma n)]. \quad (1.42)$$

Обозначив $\beta_0\sigma$ через K, получим (1.42) в виде

$$\frac{K}{\sqrt{\pi}}\int_{v'}^{v''} \exp\,[-K^2v^2]dv. \quad (1.43)$$

Это выражение является в то же время вероятностью величине np находиться в пределах $[(s/\sigma) + v']$ и $[(s/\sigma) + v'']$. И кроме того

$$(1/2K^2) = (s/\sigma^2)[1-(s/\sigma n)]. \quad (1.44)$$

Здесь обычно добавляют, что выведенные формулы применимы лишь тогда, когда n большое число и ни p, ни q не очень малы. На самом деле формулу (1.43) можно вывести и в случае бесконечно малого p, если только m или s/σ соответственно велики.

Имея в виду обозначения п. 2, полагая

$$z = m' + v,\ (v/m') = \varepsilon$$

и применяя формулу Стирлинга и разложение

$$\ln(1+\varepsilon) = (\varepsilon/1) - (\varepsilon^2/2) + (\varepsilon^3/3) - \ldots,$$

мы получим из формул (1.11) и (1.12)

$$\Omega(z) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi m}}\exp[-(v\sigma/2)\varepsilon + (v\sigma/3)\varepsilon^2 - (v\sigma/4)\varepsilon^3 + \ldots] \approx$$

$$\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi m'}}\exp[-\frac{\sigma v^2}{2m'}]. \quad (1.45)$$

Последний результат вполне точно соответствует формуле (1.43), так как при $n = \infty$

$$(1/2K^2) = (s/\sigma^2) = (m'/\sigma).$$

После этого и предшествующих параграфов основная формула (1.2) и зависящие от нее формулы, например, (1.11) и (1.12), приобретают [сохраняют] самостоятельное значение лишь для случая, при котором m или m' мало. В остальных случаях при очень малых и, теоретически, бесконечно малых p или q можно спокойно пользоваться обычными приближенными формулами.

Глава 2. Приложение формул Главы 1 к некоторым данным статистики самоубийств и несчастных случаев

9. Теперь следует попытаться приложить формулы первой главы к статистическим рядам абсолютных [не относительных] чисел, которые указывают для ряда лет сколько раз в течение каждого года в заданном сообществе произошло определенное событие. Мы выбираем здесь такие примеры, для которых отдельные члены рядов неизменно относятся к большому количеству людей (не менее нескольких тысяч), тогда как сами числа, т. е. члены рядов, невелики (не превышают двадцати).

Пример 1. Самоубийства детей в Пруссии. Приведенная ниже Табл. 2.1 указывает количество мальчиков и девочек в возрасте до 10 лет, кончивших жизнь самоубийством в Пруссии в период с 1869 по 1893 год (Mayr 1896a, p. 696).

Рассматривая вначале столбец 2, замечаем, что числа самоубийств колеблются от 0 до 6, причем они лучше всего видны в следующей Табл. 2.2, во втором столбце которой показано в течение скольких лет l_x из 25 изученных произошло x = 0, 1, 2, … самоубийств [мальчиков].

Таблица 2.1

Самоубийства детей в Пруссии

Jahr	Knaben	Mädchen	Zusammen
1	2	3	4
1869	2	1	3
70	3	-	3
71	1	1	2
72	4	-	4
73	1	1	2
74	4	-	4
75	-	2	2
76	3	1	4
77	-	-	-
78	1	-	1
79	2	-	2
80	6	-	6
81	3	-	3
82	4	-	4
83	1	-	1
84	-	-	-
85	2	-	2
86	2	-	2
87	1	-	1
88	1	1	2
89	-	-	-
90	2	1	3
91	1	1	2
92	1	1	2
93	4	1	5
Im ganzen	49	11	60

Перевод. Столбцы 1 – 4: Год. Мальчиков. Девочек. Всего. Последняя строка: Всего

Вместо Таблицы 2.2

x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

l_x = 4, 8, 5, 3, 4, 0, 1 Всего 25

Сейчас наша задача состоит в том, чтобы проверить, можно ли приведенные статистические данные согласовать с известной по первой главе схемой теории вероятностей. Следует спросить: в скольких случаях из 25 результаты x = 0, 1, 2, … подтвердят эту схему вероятнейшим образом? Ответ представит произведение $25w_x$, в котором w_x имеет то же значение как в п. 1. В основную формулу (1.2) вместо неизвестного m придется только подставить его вероятнейшее значение, а именно среднее m' = 49/25 = 1.96 [49 = $\sum xl_x$]. Таким образом мы получим следующий ряд чисел

$x \quad = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$
$25w_x = 3.4,\ 6.8,\ 6.8,\ 4.5,\ 2.2,\ 0.9,\ 0.3,\ 0.1,\ 0.0$

Назовем по Лексису *дисперсией* тот способ, которым члены статистического ряда распределены относительно его среднего или иначе, тот образ колебаний, который представляет ряд. Тогда можно будет сказать, что дело идет о противопоставлении *ожидаемой* дисперсии элемента x, указанной рядом значений $25w_x$, его *действительной* дисперсии, определяемой рядом значений l_x, и о проверке, совпадают ли они в общем таким образом, что уклонения величин l_x от соответствующих значений $25w_x$ могут быть истолкованы как случайные в смысле теории вероятностей.

По первому впечатлению действительная дисперсия неплохо отражает ожидаемую, и это подтверждается сравнением двух значений средней квадратической ошибки величины x, – полученных косвенным путем, т. е. по формуле (1.15) или на основании ряда значений $25w_x$, и прямым путем, т. е. по формуле (1.17) или на основании ряда значений l_x. Мы получаем

$$[\varepsilon'(x)]^2 = 1.96,\ [\varepsilon''(x)]^2 = 2.46,\ \varepsilon'(x) = 1.40,\ \varepsilon''(x) = 1.57.$$

Прибегая кроме того к формулам (1.18) и (1.19), в которых вместо m подставлено m', мы приходим к

$$\varepsilon[\varepsilon'(x)]^2 = 0.28,\ \varepsilon[\varepsilon''(x)]^2 = 0.62.$$

Различие между результатами прямого и косвенного методов заключено в интервале соответствующих средних ошибок:
$2.46 - 1.96 = 0.50 < 0.62$.

Вполне аналогичные вычисления для девочек (столбец 3 той же таблицы) приводит к следующему результату

$x \quad = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
$l_x \quad = 15,\ 9\ \ 1,\ 0$
$25w_x = 16.1,\ 7.1,\ 1.6,\ 0.2$

$$[\varepsilon'(x)]^2 = 0.44,\ [\varepsilon''(x)]^2 = 0.34,\ \varepsilon'(x) = 0.66,\ \varepsilon''(x) = 0.58,$$

$$\varepsilon[\varepsilon'(x)]^2 = 0.13,\ \varepsilon[\varepsilon''(x)]^2 = 0.18.$$

Наконец, для столбца 4 мы имеем

$x \quad = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ и более
$l_x \quad = 3,\ 3,\ 9,\ 4,\ 4,\ 1,\ 1,\ 0$
$25w_x = 2.3,\ 5.4,\ 6.5,\ 5.2,\ 3.1,\ 1.5,\ 0.6,\ 0.4$

$$[\varepsilon'(x)]^2 = 2.40,\ [\varepsilon''(x)]^2 = 2.33,\ \varepsilon'(x) = 1.55,\ \varepsilon''(x) = 1.53,$$

$$\varepsilon[\varepsilon'(x)]^2 = 0.31,\ \varepsilon[\varepsilon''(x)]^2 = 0.74.$$

Из приведенных результатов вычислений следует, что и здесь, и в предыдущем случае действительная дисперсия совпадает с ожидаемой еще точнее, чем в первом случае. Но во всех трех случаях проявляется неблагоприятное влияние сравнительно малого числа элементов (всего 25) и, соответственно, имеют место большие уклонения от нормы. Чтобы противостоять этому влиянию, я в последующих примерах привожу другие статистические ряды в соответствии со схемой п. 5.

10. *Пример 2.* Самоубийства женщин в восьми немецких государствах. Приведенная таблица указывает число ежегодных самоубийств женщин с 1881 по 1894 год в следующих государствах […] (Mayr 1896b, p. 718).

Таблица 2.3

Самоубийства женщин в восьми немецких государствах

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	im ganzen
a)	0	2	0	2	0	0	3	3	1	3	1	3	1	1	20
b)	2	3	1	2	2	0	4	1	3	1	5	*3*	1	3	31
c)	3	2	1	4	3	0	3	2	3	4	1	1	4	5	36
d)	5	2	3	3	3	6	4	1	4	2	2	1	1	0	37
e)	4	1	1	6	1	4	5	0	6	4	0	3	3	2	40
f)	5	1	8	6	6	3	5	7	5	7	6	5	3	5	72
g)	1	3	4	4	10	9	4	2	8	9	4	8	6	2	74
h)	2	5	5	2	2	4	10	2	6	9	9	4	9	10	79
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	im ganzen

Эту таблицу мы теперь покажем в форме, которая непосредственно указывает, сколько раз в каждой строке и во всех строках вместе взятых встречались ежегодные данные 0, 1, 2, … и которая отображает действительную дисперсию ежегодных данных.

Таблица 2.4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	4	4	2	4							
b)	1	4	3	4	1	1					
c)	1	3	2	4	3	1					
d)	1	3	3	3	2	1	1				
e)	2	3	1	2	3	1	2				
f)		1		2		5	3	2	1		
g)		1	2	1	4		1		2	2	1
h)			4		2	2	1			3	2
Sa.	9	19	17	20	15	11	8	2	3	5	3

Соответствующая ожидаемая дисперсия вычисляется на основании среднего значения, которое определяется делением чисел последнего столбца таблицы на 14 [лет], см. Табл. 2.5. [Пояснения недостаточны.]

Таблица 2.5

	0	1	2	3	*	5	6	7	8	9	10	11 —
a)	3,36	4,79	3,42	1,63	0,58	0,17	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
b)	1,53	3,39	3,75	2,77	1,53	0,68	0,25	0,08	0,02	0.01	0.00	0,00
c)	1,07	2,75	3,54	3,03	1,95	1,00	0,43	0,16	0,05	0,01	0,00	0,00
d)	1,00	2,63	3,48	3,07	2,03	1,07	0,47	0,18	0,06	0,02	0,01	0,00
e)	0,80	2,30	3,28	3,13	2,23	1,28	0,61	0,25	0,09	0,03	0,01	0,00
f)	0,08	0,42	1,08	1,85	2,38	2,45	2,10	1,54	0,99	0,57	0,29	0,23
g)	0,07	0,38	0,99	1,75	2,21	2,44	2,15	1,62	1,07	0,63	0,33	0,27
h)	0,05	0,28	0,79	1,49	2,10	2,37	2,22	1,79	1,26	0,79	0,45	0,41
Sa.	7,96	16,94	20,33	18,70	15,11	11,45	8,27	5,63	3,55	2,05	1,09	0,92

Рассматривая сводные строки таблиц 2.4 и 2.5, заметим, что за несколькими исключениями, которые быть может были вызваны слишком малочисленными элементами, статистические данные весьма удовлетворительно совпадают с предварительно вычисленными теоретическими результатами.

Если собрать значения x (т. е. ежегодные данные по отдельным государствам), равные 0 – 2, 3 – 4 и пяти и более в первую, вторую и третью группы, то окажется, что в этих группах ожидаемые и действительные суммы равны 45.2 [= 7.96 + 16.94 + 20.33] и 45 [= 9 + 19 + 17]; 33.8 и 35; и 33.0 и 32.

Сводное выражение этих результатов предоставляет ожидаемая дисперсия посредством $\varepsilon_0'(x)$, см. формулу (1.24), и действительная дисперсия посредством $\varepsilon_0''(x)$, см. формулу (1.26). Приведем теперь числовые данные, указывая вначале квадраты этих величин, а затем сами эти величины. В скобках добавлены соответствующие средние квадратические ошибки, вычисленные по формулам (1.31; 1.32; 1.29; 1.33).

$[\varepsilon_0'(x)]^2 = 3.47$ (0.18); $[\varepsilon_0''(x)]^2 = 4.60$ (0.53);

$\varepsilon_0'(x) = 1.86$ (0.05); $\varepsilon_0''(x) = 2.15$ (0.14).

11. *Пример 3.* Несчастные случаи со смертельным исходом в 11 профессиональных товариществах; число таких ежегодных производственных несчастных случаев показано в Табл. 2.6. Я выбрал те из существовавших 6 июля 1884 г. товариществ, для которых статистика, составленная на основании закона о страховании от несчастных случаев, дает наименьшее число этих случаев. Товарищества эти указаны не по названию, а порядковыми номерами, под которыми они значатся в статистических публикациях (*Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich*, либо *Die amtlichen Nachrichten des Reichsversicherungsamt*).

Таблица 2.6

Несчастные случаи со смертельным исходом в различных товариществах

Nr. der Berufsgenossen-schaft	86	87	88	89	90	91	92	93	94
13	6	8	7	5	14	8	9	4	8
14	2	2	2	1	1	3	5	3	4
12	-	1	2	2	5	-	2	7	4
20	3	3	5	3	10	2	5	4	4
23	3	9	6	11	6	8	5	4	4
27	1	2	2	3	1	1	1	4	2
29	4	8	4	3	8	3	7	4	12
40	2	5	1	3	2	-	-	6	7
41	1	3	5	4	6	7	5	8	7
42	5	6	5	5	3	4	-	8	5
55	5	5	2	2	7	5	3	6	4

Если обработать собранные данные в том же порядке, как выше в Примере 2 п. 10 о самоубийствах женщин, то окончательные результаты будут такими (Табл. 2.7).

Таблица 2.7

Те же несчастные случаи, действительные и ожидаемые

Jahres-ergebnis	Zahl der Falle, in denen das nebenstehende Jahresergebnis	
	vorgekommen ist	Zu erwarten war
1	2	3

0	6	3,69
1	9	9,61
2	14	13,89
3	13	15,21
4	14	14,34
5	16	12,31
6	7	9,80
7	7	7,28
8	8	5,06
9	2	3.30
10	1	2,03
11	1	1,19
12	1	0,66
13	-	0,34
14	1	0,17
15	-	0,08
16 u. mehr	-	0,04

Перевод. Столбцы: Число ежегодных случаев. Сколько раз за все годы во всех товариществах произошло указанное в первом столбце число несчастных случаев. То же, ожидаемое число раз. Последняя строка: И более

Видно, что столбец 2 соответствует последней строке Табл. 2.4 в п. 10, а столбец 3 – последней строке Табл. 2.5 того же пункта.

И в этом примере действительная дисперсия достаточно хорошо соответствует ожидаемой. Теперь объединим числа в группы (Табл. 2.8).

Таблица 2.8

Те же данные, объединенные в группы

Jahres-ergebnis	Zahl der Falle, in denen das nebenstehende Jahresergebnis vorgekommen ist	zu erwarten war
0 - 2	28	27,2
3 - 4	27	29,6
5 - 6	23	22,1
7 -	21	20,1

Отсюда следует (см. пояснение в конце п. 10):

$$[\varepsilon_0'(x)]^2 = 4.36\ (0.21);\ [\varepsilon_0''(x)]^2 = 5.48\ (0.70);$$
$$\varepsilon_0'(x) = 2.09\ (0.05);\ \varepsilon_0''(x) = 2.34\ (0.17).$$

12. *Пример 4.* Погибшие от удара лошадиным копытом в прусской армии. В Табл. 2.9 показано число погибших таким образом военнослужащих по корпусам (G обозначает гвардейский корпус) и календарным годам (*Preussischen Statistik (amtliches Quellenwerk*, Hefte 38, 46, 50, 55, 60, 63, 67, 80, 84, 87, 91, 95, 99, 108, 114, 118, 124, 132, 135, 139).

Таблица 2.9

Число погибших от удара лошадиным копытом

	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
G	—	2	2	1	—	—	1	1	—	3	—	2	1	—	—	1	—	1	—	1
I	—	—	—	2	—	3	—	2	—	—	—	1	1	1	—	2	—	3	1	—
II	—	—	—	2	—	2	—	—	1	1	—	—	2	1	1	—	—	2	—	—
III	—	—	—	1	1	1	2	—	2	—	—	—	1	—	1	2	1	—	—	—
IV	—	1	—	1	1	1	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1	—	—
V	—	—	—	—	2	1	—	—	1	—	—	1	—	1	1	1	1	1	1	—
VI	—	—	1	—	2	—	—	1	2	—	1	1	3	1	1	1	—	3	—	—
VII	1	—	1	—	—	—	1	—	1	1	—	—	2	—	—	2	1	—	2	—
VIII	1	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	1	1	—	1

IX	—	—	—	—	—	2	1	1	1	—	2	1	1	—	1	2	—	1	—	—
X	—	—	1	1	—	1	—	2	—	2	—	—	—	—	2	1	3	—	1	1
XI	—	—	—	—	2	4	—	1	3	—	1	1	1	1	2	1	3	1	3	1
XIV	1	1	2	1	1	3	—	4	—	1	—	3	2	1	—	2	1	1	—	—
XV	—	1	—	—	—	—	—	1	—	1	1	—	—	—	2	2	—	—	—	—

Здесь прежде всего можно в точности повторить всё так же, как и в обоих предыдущих случаях. Результатом будет Табл. 2.10.

Таблица 2.10

Те же несчастные случаи, действительные и ожидаемые

Jahres-ergebnis	Zahl der Falle, in denen das neben-stehende Jahresergebnis	
	vorgekommen ist	zu erwarten war
0	144	143,1
1	91	92,1
2	32	33,3
3	11	8,9
4	2	2,0
5 u. mehr	-	0,6

Пояснение. Наименования столбцов те же, что и в Табл. 2.7.

$[\varepsilon_0'(x)]^2 = 0.70\ (0.05)$; $[\varepsilon_0''(x)]^2 = 0.73\ (0.09)$;

$\varepsilon_0'(x) = 0.84\ (0.03)$; $\varepsilon_0''(x) = 0.85\ (0.05)$.

Затем, однако, после исключения гвардейского корпуса и корпусов I, VI и XI, состав которых существенно отличен от установленного, можно обработать оставшиеся корпуса как одно целое, состоящее из 200 членов [= 10x20, см. ниже] по схеме п. 4. Гвардейский корпус, не считая артиллерии, саперных войск и обоза, состоит из 134 пехотных рот и 40 кавалерийских эскадронов, XI корпус включает 3 дивизии, в I корпусе 30, и в VI корпусе 25 эскадронов при норме 20.

Результатом будет Табл. 2.11.

Таблица 2.11

Те же данные, объединенные по 10 корпусам

Jahres-ergebnis	Zahl der Falle, in denen das neben-stehende Jahresergebnis	
	vorgekommen ist	zu erwarten war
0	109	108,7
1	65	66,3
2	22	20,2
3	3	4,1
4	1	0,6
5 u. mehr	-	0,1

$[\varepsilon_0'(x)]^2 = 0.61\ (0.06)$; $[\varepsilon_0''(x)]^2 = 0.61\ (0.09)$;

$\varepsilon_0'(x) = 0.78\ (0.04)$; $\varepsilon_0''(x) = 0.78\ (0.06)$.

Как видно, соответствие теории с опытом в обоих случаях [таблицы 2.10 и 2.11] не оставляет желать лучшего.

Глава третья. Теория избыточных ошибок

13. Результаты попыток предыдущей главы по применению некоторых формул теории вероятностей к статистическим данным на первый взгляд противоречат тому известному факту, что колебания, имеющие место в статистических рядах[17] как правило совсем не соответствуют ожиданиям теории вероятностей.

Точное совпадение действительной дисперсии с ожидаемой было до сих пор установлено в одном-единственном случае, – Лексисом, для соотношения мужских и женских рождений. Напротив, колебания во времени остальных относительных чисел, не говоря уж об абсолютных, без исключения значительно превосходят норму, указываемую теорией[18].

Я рассматриваю только относительные числа, притом такие, которые чисто формально могут считаться приближенными значениями вероятностей. Они выражаются отношениями двух чисел, одно из которых, знаменатель, показывает сколько отдельных случаев было вообще зарегистрировано, второе же, числитель, – сколько раз при этом наблюдалось определенное событие.

Обозначим через

$$p_1', p_2', ..., p_\sigma' \qquad (3.1)$$

статистический ряд, состоящий из σ элементов. Величины p_i' относятся к указанному выше виду, т. е. чисто формально могут рассматриваться как приближенные значения вероятностей. Положим теперь, что члены ряда (3.1) являются выражениями общей вероятности, точное значение которой равно p_0. Тогда для оценки ожидаемых колебаний p_i' служит средняя квадратическая ошибка

$$\varepsilon(p_i') = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \; q_0 = 1 - p_0, \qquad (3.2)$$

где для простоты изложения принято, что n – постоянное количество испытаний.

Величина p_0 неизвестна и поэтому упомянутую среднюю ошибку можно вычислить только приближенно, притом двумя методами. Косвенный метод состоит в том, что p_0 заменяется средним арифметическим из σ чисел p_0' и тогда

$$\varepsilon'(p_i') = \sqrt{\frac{p_0' q_0'}{n}}, \; q'_0 = 1 - p'_0. \qquad (3.3)$$

---

[17] Здесь и ниже под статистическим рядом я понимаю число значений определенной статистической величины, каждое из которых соответствует определенному календарному году или иному интервалу времени, притом все эти интервалы взятые совместно образуют единый период времени. Л. Б.

[2] Этому результату мы обязаны В. Лексису (1877; 1875, последняя глава; 1876; 1879; 1886) и 4 статьи (1890 – 1894). Л. Б.

Прямой метод приводит к

$$\varepsilon''(p_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\sigma}(p_i' - p_0)^2}{\sigma}}$$

или практически к

$$\varepsilon''(p_i') = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\sigma}(p_i' - p_0')^2}{\sigma - 1}}\ . \qquad (3.4)$$

Если σ является в какой-то мере большим числом, то следует ожидать, что результаты обоих методов будут примерно совпадать, и притом тем ближе, чем больше число σ. Опыт, однако, показывает, что $\varepsilon''(p_i')$ всегда оказывается больше, чем $\varepsilon'(p_i')$ или что отношение

$$Q' = \varepsilon''(p_i')/\varepsilon'(p_i') \qquad (3.5)$$

всегда больше единицы и нередко равно 10, 20, 100 и более.

Для исследованных статистических рядов, которые приводят к подобному несоответствию между ожиданиями теории и статистическими фактами, характерно, что они состоят из большого числа испытаний и что кроме того число появления события в них также велико и измеряется тысячами или сотнями. И как раз в этом склонны усматривать необходимую предпосылку приложимости теории вероятностей к статистическим данным. Но для многочисленного появления события требуется только исследовать достаточно крупные коллективы людей, – в достаточно протяженных областях, или, другими словами, выбрать достаточно обширное поле наблюдений.

События человеческой жизни, примеры которых были рассмотрены в гл. 2-й, не являются исключением из всеобще действующего правила.

Если, к примеру, подвергнуть проверке колебания относительных чисел самоубийств (их абсолютных чисел, деленных на соответствующее число живущих), которые статистика указывает на каждый год для всей Германии за 1881 – 1894 гг., то окажется, что Q' примерно равно 5. Аналогично обстоит дело с несчастными случаями со смертельным исходом. Напротив, из аналогичного соотношения $\varepsilon''(x)/\varepsilon'(x)$ или $\varepsilon''_0(x)/\varepsilon'_0(x)$ для примеров гл. 2-й следуют значения

1.12, 0.88, 0.99 в Примере 1 (три варианта), 1.15 в Примере 2,
1.12 в Примере 3, 1.01 и 1.00 в Примере 4 (два варианта)

Итак, именно большое число появлений события влечет за собой несовпадение действительной дисперсии с ожидаемой, тогда как при их малом числе, на что указывают все без исключения примеры гл. 2-й, совпадение является почти полным. Но, чтобы эту чисто эмпирически установленную связь признать необходимой и закономерной, требуется дополнительное теоретическое обоснование.

14. Мы рассмотрим следующий случай. Исследуемая вероятность, чьими приближенными значениями представляются величины p'_i, не остается постоянной для всех σ серий испытаний, а соответственно равна в них p_1, p_2, … В общем, приближенное значение p_i' соответствует точному значению p_i. Далее,

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_\sigma}{\sigma} = p_0 \text{ и, как и раньше, } \frac{p_1' + p_2' + \ldots + p_\sigma'}{\sigma} = p_0'$$

и кроме того

$$1 - p_i = q_i,\ 1 - p'_i = q'_i,\ 1 - p_0 = q_0,\ 1 - p'_0 = q'_0.$$

Ради простоты изложения я полагаю, что каждый ряд состоит из одного и того же числа n испытаний. Будем отыскивать ожидаемую дисперсию элементов p_i'. Средняя квадратическая ошибка, которую мы обозначим через $\delta(p_i')$, будет, очевидно, определяться условием

$$[\delta(p'_i)]^2 = \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(p_i' - p_0)^2}{\sigma}], \tag{3.6}$$

где Е имеет значение, указанное в п. 1. Из (3.6) следует

$$[\delta(p'_i)]^2 = \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(p_i')^2}{\sigma}] - 2p_0\mathrm{E}\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{p_i'}{\sigma} + p_0^2. \tag{3.7}$$

Но

$$\mathrm{E}(p'_i - p_i)^2 = p_iq_i/n,\ \mathrm{E}(p'_i)^2 = p_i^2 + p_iq_i/n.$$

Кроме того,

$$\mathrm{E}\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{p_i'}{\sigma} = p_0.$$

Соответственно, (3.7) переходит в

$$[\delta(p'_i)]^2 = \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{p_i^2}{\sigma} + \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{p_iq_i}{\sigma n} - p_0^2. \tag{3.8}$$

Найденное выражение для квадрата средней квадратической ошибки может быть преобразовано следующим образом. Легко убедиться в верности уравнения

$$p_i q_i = p_0 q_0 + (p_0 - q_0)(p_0 - p_i) - (p_i - p_0)^2. \qquad (3.9)$$

Полагая в нем $i = 1, 2, \ldots, \sigma$ и складывая почленно левые и правые части появляющихся при этом уравнений, мы получим

$$\sum p_i q_i = \sigma p_0 q_0 - \sum (p_i - p_0)^2. \qquad (3.10)$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{p_i^2}{\sigma} - p_0^2 = \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}. \qquad (3.11)$$

Исходя из (3.10) и (3.11), уравнение (3.8) можно привести к виду

$$[\delta(p'_i)]^2 = \frac{p_0 q_0}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}. \qquad (3.12)$$

Применяя теперь (3.2) и новое обозначение

$$\frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma} = \eta^2(p_i), \qquad (3.13)$$

мы получим

$$\delta(p'_i) = [\varepsilon^2(p'_i) + \eta^2(p_i)]^{1/2}. \qquad (3.14)$$

Величину $\delta(p'_i)$ назовем *полной ошибкой*, $\varepsilon(p'_i)$ – *нормальной ошибкой*, и, наконец, $\eta(p_i)$ – *абсолютной избыточной ошибкой.* В соответствии с формулой (3.14) полная ошибка составлена как бы из двух самостоятельно действующих источников. Первый объясняется *случайными причинами*, которые влекут за собой уклонения p'_i от p_i и ему соответствует результат $\varepsilon(p'_i)$. Второй источник погрешности, состоящий в колебаниях основной вероятности на протяжении σ серий испытаний, вызывает действие $\eta(p_i)$. И, наконец, $\delta(p'_i)$ является выражением совместного действия обоих источников погрешности.

Из (3.13) следует, что если все p_i равны друг другу, абсолютная избыточная ошибка равна нулю, а полная ошибка совпадает с нормальной. Так происходит в схеме п. 13 и является случаем *нормальной дисперсии* (Лексис). Если же вероятности p_i не равны друг другу, полная ошибка будет превышать нормальную на $\eta^2(p_i)/[\delta(p'_i) + \varepsilon(p'_i)]$, и здесь мы встречаемся со *сверхнормальной дисперсией.*

Выражение

$$\frac{\eta(p_i)}{\varepsilon(p'_i)} = \lambda \qquad (3.15)$$

называется *относительной избыточной ошибкой*. Пусть величина, не зависящая от числа испытаний n

$$\sqrt{\frac{1}{p_0 q_0}\sum\frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}},$$

обозначена буквой c, тогда из (3.2) и (3.13) следует, что

$$\lambda = c\sqrt{n-1}.$$

Для отношения

$$Q = \frac{\delta(p_i')}{\varepsilon(p_i')} \qquad (3.16)$$

имеет место выражение

$$Q^2 - 1 = \lambda^2,\ Q = \sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{1+(n-1)c^2}. \qquad (3.17)$$

Итак, Q изменяется при изменении числа испытаний и именно возрастает или убывает с ним.

Пусть при заданном ряде $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ и числе испытаний 100 000 будет $Q = 2$ (и $\lambda = 1.732$ [$= \sqrt{3}$]). Каково будет Q при 10 000, 1000 и 100 испытаниях? Прежде всего следует определить константу c из уравнения (3.17), подставив $Q = 2$ и указанные значения n. Мы получим

$n = 10\,000$, $\lambda = 0.548$, $Q = 1.140$; $n = 1000$, $\lambda = 0.173$, $Q = 1.015$;
$n = 100$, $\lambda = 0.0545$, $Q = 1.0015$.

Теперь ясно, что по мере убывания числа испытаний существенная сверхнормальная дисперсия ($Q = 2$!) настолько убывает (до 1.0015), что становится вряд ли отличимой от нормальной!

Выше обсуждалось отношение дисперсий вероятностей. Остается вывести аналогичные формулы для числа появления события. Пусть

$$np'_1 = x_1,\ np'_2 = x_2,\ \ldots,\ np'_\sigma = x_\sigma.$$

Числа

$$x_1, x_2, \ldots, x_\sigma \qquad (3.18)$$

очевидно указывают, в скольких случаях из n происходит рассматриваемое событие в отдельных сериях испытаний. Пусть кроме того

$$np_1 = m_1,\ np_2 = m_2,\ \ldots,\ np_\sigma = m_\sigma$$

будут математическими ожиданиями чисел появления события и m_0 – средним арифметическим чисел m_i.

Обозначим через $\delta(x_i)$, $\varepsilon(x_i)$ и $\eta(m_i)$ полную и нормальную ошибки и абсолютную избыточную ошибку для ряда (3.18). Они выводятся из следующих уравнений, которые не требуют доказательства:

$$\delta(x_i) = n\delta(p'_i),\ \varepsilon(x_i) = n\varepsilon(p'_i),\ \eta(m_i) = n\eta(p_i).$$

Поэтому, далее,

$$\delta(x_i) = [\varepsilon^2(x_i) + \eta^2(m_i)]^{1/2},$$

$$\varepsilon(x_i) = \sqrt{np_0q_0}\,,\ \eta(m_i) = \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum\frac{(m_i-m_0)^2}{\sigma}}\,.$$

Наконец, относительная избыточная ошибка λ и Q соответственно совпадают для рядов (3.1) и (3.18).

15. Для специального случая, при котором вероятности p_1, p_2, …, p_σ бесконечно малы, а n – бесконечно велико, следует в только что выведенные формулы подставить $(1/n) = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, что приведет к

$$\varepsilon(x_i) = \sqrt{m_0}\,,\ \eta(m_i) = \sqrt{\sum\frac{(m_i-m_0)^2}{\sigma}}\,,$$

$$\delta(x_i) = \sqrt{m_0+\sum\frac{(m_i-m_0)^2}{\sigma}}\,,\ \lambda = \sqrt{m_0\sum(1/\sigma)[(m_i/m_0)-1]^2}\,,$$

$$Q = \sqrt{1+m_0\sum(1/\sigma)[(m_i/m_0)-1]^2}\,.$$

Вывод этих формул предполагает, что число испытаний [в отдельных сериях] постоянно, в действительности же это ограничение можно устранить, если непосредственно исходить из уравнения

$$\delta^2(x_i) = \mathrm{E}\sum\frac{(x_i-m_0)^2}{\sigma}$$

и из соотношений (п. 1)

$$\mathrm{E}(x_i - m_i)^2 = m_i.$$

В этом случае мы получим совпадение с указанными выше формулами:

$$\delta^2(x_i) = \mathrm{E}\sum\frac{x_i^2}{\sigma} - 2m_0\mathrm{E}\sum\frac{x_i}{\sigma} + m_0^2 = \sum\frac{m_i^2+m_i}{\sigma} - 2m_0^2 + m_0^2 =$$

$$m_0 + \sum \frac{(m_i - m_0)^2}{\sigma}.$$

Выражение для λ означает, что если увеличить число испытаний во всех сериях в равной мере, например в k раз, не изменяя при этом исходных вероятностей, то в той же мере возрастут все m_i, а потому и m_0, так что λ возрастет в отношении $1{:}\sqrt{k}$ [т. е. в $\sqrt{k}$ раз]. Зависимость отношения Q от числа испытаний вызвана тем, что $Q^2 - 1$ прямо пропорционально k.

16. Рассмотренный в предыдущих пунктах случай отличается от случая п. 4 тем, что вместо неизменного математического ожидания m имеют место столько же величин $m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$, сколько серий испытаний, и мы теперь соответственно изменим схему п. 5. Примем для этой цели, что элементы некоторой строки в таблице значений x_{ij} п. 5 зависят уже не от одного и того же числа появления события m_j, но что ожидаемые величины изменяются, так что элементу x_{ij} будет соответствовать математическое ожидание m_{ij}.

Введем обозначения

$$(1/\sigma)(m_{1j} + m_{2j} + \ldots + m_{\sigma j}) = m_{0j},\ (1/\nu)(m_{01} + m_{02} + \ldots + m_{0\nu}) = m_{00}.$$

Для каждой строки указанной таблицы имеет место нормальная, абсолютная избыточная, и полная ошибки

$$\varepsilon(x_{ij}) = \sqrt{m_{0j}},\ \eta_j(m_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(m_{ij} - m_{0j})^2}{\sigma}},$$

$$\delta_j(x_{ij}) = [\varepsilon_j^2(x_{ij}) + \eta_j^2(m_{ij})]^{1/2}.$$

Пусть теперь

$$\sqrt{(1/\nu)\sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j^2(x_{ij})} = \varepsilon_0(x_{ij}),\ \sqrt{(1/\nu)\sum_{j=1}^{\nu} \eta_j^2(m_{ij})} = \eta_0(m_{ij}),$$

$$\sqrt{(1/\nu)\sum_{j=1}^{\nu} \delta_j^2(x_{ij})} = \delta_0(x_{ij}),\ \eta_0(m_{ij})/\varepsilon_0(x_{ij}) = \lambda_0,\ \delta_0(x_{ij})/\varepsilon_0(x_{ij}) = Q_0,$$

тогда

$$\varepsilon_0(x_{ij}) = \sqrt{m_{00}},\ \eta_0(m_{ij}) = \sqrt{(1/\nu)\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{(m_{ij} - m_{0j})^2}{\sigma}},$$

$$\delta_0(x_{ij}) = [\varepsilon_0^2(x_{ij}) + \eta_0^2(m_{ij})]^{1/2},$$

$$\lambda_0 = \sqrt{m_{00}\sum_{j=1}^{\nu}(m_{0j}/m_{00})^2 \sum_{i=1}^{\sigma}\ (1/\sigma)[(m_{ij}/m_{0j}) - 1]^2},\ Q_0 = \sqrt{1 + \lambda_0^2}.$$

Зависимость величин λ_0 и Q_0 от числа испытаний очевидно в точности та же, что и указанная в конце п. 15.

17. Рассмотренная в пп. 14 – 16 схема переменных вероятностей соответствующего события или переменных математических ожиданий чисел его появления предоставляет нам возможность подробного рассмотрения различия в поведении указанных малых и больших чисел.

Именно, в соответствии с гипотезой переменной вероятности вычисленная прямым методом средняя квадратическая ошибка, см. формулу (3.4), появляется уже не в качестве приближенного значения $\varepsilon(p_i')$, см. формулу (3.2), а как приближенное значение полной ошибки $\delta(p_i')$, см. (3.6). Средняя квадратическая ошибка $\varepsilon'(p_i')$, см. формулу (3.2), вычисленная косвенным методом, оказывается при этом приближенным значением нормальной ошибки $\varepsilon(p_i')$, см. формулу (3.3). Итак, при сколько-нибудь больших n и σ отношение Q', см. формулу (3.5), следует считать приближенным значением Q (3.16).

Далее, в соответствии с предположенным переменным математическим ожиданием числа появления события, величины $\varepsilon'(x)$ и $\varepsilon''(x)$ появившиеся в п. 4, оказываются соответственно приближенными значениями $\varepsilon(x_i)$ и $\delta(x_i)$ (п. 15). И, наконец, в нашей новой схеме приближенные значения $\varepsilon_0'(x)$ и $\varepsilon_0''(x)$ п. 5 соответствуют точным значениям $\varepsilon_0'(x_{ij})$ и $\delta_0(x_{ij})$ п. 16.

Предположение о переменной вероятности позволяет сразу же пояснить указанное в п. 13 неравенство $\varepsilon''(p_i') > \varepsilon'(p_i')$, поскольку выражение $\{[\varepsilon''(p_i')]^2 - [\varepsilon'(p_i')]^2\}^{1/2}$ предоставляет приближенное значение абсолютной избыточной ошибки $\eta(p_i)$, а при переменной вероятности она не равна нулю, тем более не иррациональна [не комплексна].

Названная гипотеза приводит и к тому, что $\varepsilon''(p_i')/\varepsilon'(p_i')$ и $\varepsilon''(x)/\varepsilon'(x)$ в качестве приближенных выражений для $Q = \delta(p_i')/\varepsilon(p_i')$ или $\delta(x_i)/\varepsilon(x_i)$ оказываются при прочих равных условиях, т. е. при колеблемости вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ в одной и той же мере, тем менее отличным от 1, чем больше сужается поле наблюдений, к которому относится каждый элемент статистического ряда. И то же имеет место для отношения $\varepsilon_0''(x)/\varepsilon_0'(x)$ в качестве приближенного значения Q_0.

Ожидания по поводу поведения этого отношения прекрасно сбываются. При условии сокращенного поля наблюдения мы получаем, как известно, приближенно нормальную дисперсию или почти полное совпадение средних ошибок, вычисленных по прямому и косвенному методам. Чем сильнее сокращается поле наблюдений, тем реже в некотором заданном сообществе изучаемое событие, как, например, самоубийство или несчастный случай, тем лучше статистические результаты соответствуют основным математическим формулам.

Гипотеза переменных вероятности или математического ожидания помогает нам признать это поведение закономерным; в этом отношении тот факт, что малые числа появления события (при очень больших количествах испытаний) зависят от определенной нормы [своих] колебаний, или стремятся к такой зависимости, вполне можно назвать законом малых чисел.

18. Было обычным в самом общем виде рассматривать относительные статистические числа, поскольку в достаточной мере выполнялись определенные формальные условия, ср. п. 13, в качестве приближенных значений вероятностей и при необходимости соответственно обращаться с ними, ни в коей мере не заботясь о допустимости этого. Подобную наивную точку зрения мы находим у Пуассона и Кетле, и она разделяется многими более поздними авторами.

Похвальная заслуга Лексиса состояла в том, что он начал критиковать это основное представление. Он (1877, §§ 11 – 12 и след.) пришел к мысли о том, что свойство статистического относительного числа быть приближенным значением некоторой математической вероятности является не чем-то само собой разумеющимся, а должно доказываться на основе имеющихся данных. Но в чем же должно состоять это доказательство?

Его ответ был примерно таким: необходимо исследовать колебания (отношение дисперсий), выказываемое рядом статистических относительных чисел и выяснить, можно ли считать их приближенными значениями общей вероятности. Именно, следует проследить, совпадает ли действительная дисперсия с ожидаемой в предположении, что связанные с рядом числа соответствуют одной и той же математической вероятности. Лексис при этом рекомендовал известный нам метод вычисления средней квадратической ошибки и по косвенному ("комбинаторному") и по прямому ("физическому") методам и противопоставление их результатов.

После сравнения действительной и ожидаемой дисперсий или значений средней квадратической ошибки, вычисленной различными методами, необходимо решить, являются ли исследуемые относительные числа приближенными значениями некоторой определенной вероятности или нет. Сам Лексис исследовал некоторые ряды на основании соотношения дисперсий и пришел к заключениям, которые в основном упомянуты в начале этой главы.

Если отклониться от темы и обсудить значение, которое в этом направлении возымели исследования Лексиса, то полагалось бы сказать, что они окончательно опровергли прежнее довольно распространенное мнение о сути статистических закономерностей.

Следует скорее спросить, обосновывает ли их результат отказ от связи большинства относительных статистических чисел с теорией вероятностей. Быть может допустимо считать, что приходится отказаться от легкомысленного приписывания отдельным членам статистических рядов приближенных значений общей и неизменной во времени вероятности.

Но эта схема теории вероятностей, которая по доказанному неприменима, – была ли она вообще единственной, которую можно принимать в расчет? Или же важно выяснить, не могут ли быть статистические ряды соотнесены со схемой переменной во времени вероятности, а отдельные члены статистического ряда истолкованы как количественно различные вероятности?

Эту возможность автор *Теории* (Лексис 1877, с. 31 и 91) не упустил из вида, но не исследовал в основном потому, что, будь ответ положительным или отрицательным, вопрос находился несколько в стороне от собственной темы сочинения.

Лишь позже Лексис (1879) выбрал в качестве обстоятельного обсуждения схему переменной от одного ряда к другому вероятности в ее применении к статистике. Математическим основанием послужила ему при этом формула, которая с точностью до множителя $(n - 1)/n$ совпадала с формулой (3.10). Различие было вызвано тем, что Лексис сознательно следовал не вполне строгому методу доказательства. Если n в некоторой мере велико, то различие незначительно, а Лексис имел в виду именно этот случай. В противном же случае формула (3.10) является единственно применимой; даже при $n = 1$ она доставляет верный результат, что, впрочем, иначе быть не могло ввиду способа ее вывода.

Далее Лексис обратил внимание на величину, которую я обозначил в п. 13 через Q', и показал, что в своем качестве приближенного значения Q в смысле п. 14 она зависит определенным образом от числа испытаний. Из этого он заключил, что если схема переменной от одного ряда к другому вероятности подходит к статистическим явлениям, то значения Q' должны тем меньше отклоняться от 1, чем больше сокращается поле наблюдений. Для некоторого числа случаев со сравнительно умеренными числами наблюдений и появлений события Лексису удалось также вывести такие значения Q', которые не очень отличались от 1. Впрочем, его результаты не были доказательными в такой степени, чтобы обосновать всеобщую применимость указанной схемы к статистике.

И ныне закон малых чисел представляется последствием продолжения исследований Лексиса и в теоретическом отношении быть может их завершением. Применяя всё меньшие и меньшие числа появления события, стало возможным свести к минимуму относительную избыточную ошибку, т. е. действие изменений вероятности, и таким образом получить почти нормальную дисперсию.

Подобное почти полное совпадение теории с практикой, которое здесь проявилось, вряд ли оставляет место сомнению об объективной значимости понятий теории вероятностей для изученных областей статистических явлений. Поле наблюдения, к которому относится исследования гл. 2-й, ограничено во времени и пространстве, но упомянутое окончательное следствие об объективном характере понятий теории вероятностей не окажется ограниченным подобным образом. То, что относится к самоубийствам или несчастным случаям в отдельных районах или для определенного круга лиц и заданного периода, явно должно быть всеобще действующим. Место и время, когда в человеческом обществе происходят самоубийства и несчастные случаи, вероятно имеют такой характер, который допускает применение понятий теории вероятностей. Это относится и к другим явлениям статистики населения и моральной, я же со своей стороны не менее уверен, что закон малых чисел может быть подтвержден всюду. Ввиду принципиального значения вопроса, увеличение числа примеров, относящихся к этому закону, представляется тем не менее весьма желательным. Каждый новый обработанный пример, если он, как следует ожидать, приведет к таким же благоприятным результатам, как и примеры гл. 2-й, поможет укрепить научное убеждение в том, что в основании всех чисел статистики населения и моральной лежат математические вероятности или их функции.

Приложение 1

Пусть

$$C_n^x p^x q^{n-x} = P_{nx},\ \sum_{x=0}^{n} P_{nx} x^r = \xi_n^{(r)},\ \sum_{x=0}^{n} P_{nx}(x-m)^r = \omega_n^{(r)},$$

$$m = np,\ p + q = 1.$$

Задача, которую следует здесь решить, состоит в том, чтобы произвести указанное суммирование для $r = 1, 2, 3, 4$.

Существует [рекуррентное] уравнение

$$P_{nx} = (pn/x)\, P_{n-1,x-1},\ x^r P_{nx} = pnx^{r-1} P_{n-1,x-1}. \qquad (1, 2)$$

Исходя из уравнения

$$x^{r-1} =$$
$$(x-1)^{r-1} + (r-1)(x-1)^{r-2} + C_r^2 (x-1)^{r-3} + \ldots + (r-1)(x-1) + 1,$$

можно кроме того вывести из уравнения (2)

$$x^r P_{nx} = pn[P_{n-1,x-1}(x-1)^{r-1} + (r-1)P_{n-1,x-1}(x-1)^{r-2} +$$
$$C_r^2 P_{n-1,x-1}(x-1)^{r-3} + \ldots + P_{n-1,x-1}]. \qquad (3)$$

Подставив в (3) значения $x = 1, 2, \ldots, n$ и сложив почленно левые и правые части полученных при этом уравнений, мы придем к формуле

$$\xi_n^{(r)} = pn[\xi_{n-1}^{(r-1)} + (r-1)\xi_{n-1}^{(r-2)} + C_r^2 \xi_{n-1}^{(r-3)} + \ldots + (r-1)\xi_{n-1}^{(1)} + \xi_{n-1}^{(0)}]. \qquad (4)$$

Однако,

$$\xi_{n-1}^{(0)} = \sum_{x=0}^{n-1} P_{n-1,x} = (p+q)^{n-1} = 1$$

и потому можно представить (4) в виде

$$\xi_n^{(r)} = pn(\xi_{n-1} + 1)^{r-1}.$$

Для случаев r = 1, 2, 3, 4 мы получим

$$\xi_n^{(1)} = pn,\ \xi_n^{(2)} = pn(\xi_{n-1}^{(1)} + 1),$$

$$\xi_n^{(3)} = pn(\xi_{n-1}^{(2)} + 2\xi_{n-1}^{(1)} + 1),\ \xi_n^{(4)} = pn(\xi_{n-1}^{(3)} + 3\xi_{n-1}^{(2)} + 3\xi_{n-1}^{(1)} + 1).$$

Величины $\xi_{n-1}^{(1)}$, $\xi_{n-1}^{(2)}$ и $\xi_{n-1}^{(3)}$ можно легко исключить. Именно, можно определить $\xi_{n-1}^{(1)}$ через $\xi_n^{(1)}$, заменив n на $(n-1)$ и таким же образом определить $\xi_{n-1}^{(2)}$ через $\xi_n^{(2)}$ и т. д. Окончательно мы придем к формулам

$$\xi_n^{(1)} = np,\ \xi_n^{(2)} = n^2p^2 + np - np^2,$$
$$\xi_n^{(3)} = n^3p^3 + 3n^2p^2 - 3n^2p^3 + np - 3np^2 + 2np^3,$$
$$\xi_n^{(4)} = n^4p^4 + 6n^3p^3 - 6n^3p^4 + 7n^2p^2 - 18n^2p^3 +$$
$$11n^2p^4 + np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4$$

или же к

$$\xi_n^{(1)} = m,\ \xi_n^{(2)} = m^2 + mq,\ \xi_n^{(3)} = m^3 + 3m^2q + mq(q-p), \quad (5, 6. 7)$$
$$\xi_n^{(4)} = m^4 + 6m^3q + 7m^2q + mq - 11m^2pq - 6mpq^2. \qquad (8)$$

Для определения $\omega_n^{(r)}$ служит разложение

$$\omega_n^{(r)} = \xi_n^{(r)} - rm\xi_n^{(r-1)} + C_r^2 m^2 \xi_n^{(r-2)} - \ldots \pm mr,$$

которое при r = 1, 2, 3, 4 приводит к

$$\omega_n^{(1)} = 0,\ \omega_n^{(2)} = mq,\ \omega_n^{(3)} = mq(q-p),\ \omega_n^{(4)} = 3m^2q^2 + mq - 6mpq^2.$$

Последнее уравнение можно представить в форме

$$\omega_n^{(4)} = 3(mq)^2 + (1 - 6pq)mq,$$

откуда, поскольку $0 < pq < 1/4$, следует, что

$$3(mq)^2 - mq/2 < \omega_n^{(4)} < 3(mq)^2 + mq.$$

Приложение 2

[Борткевич рассматривает здесь *солидарность отдельных испытаний*, но своих предшественников, – Бьенеме (Heyde & Seneta 1977, § 3.1) и Курно (1843, § 117), – упоминает лишь в последующих сочинениях. Самого себя (1894 – 1896/1968, с. 97) он тоже забыл, мы же укажем, что в теории ошибок *солидарность* явно появились не позднее, чем в эпоху Гаусса и Бесселя под названием систематических ошибок.

Пусть из одной и той же урны с белыми и черными шарами, выбранной по жребию, извлекают, каждый раз с возвращением, k шаров, – здесь и появляется солидарность. Затем снова по жребию выбираются последовательно $\mu - 1$ других (или частично других) урн с другими соотношениями шаров тех же цветов, и все μ серий извлечений составляют основную серию, которые повторяются σ раз.

Пусть вероятность выбора белого шара из урн равна c_i, а вероятность выбора урны $i - g_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, и, далее,

$$c_0 = \sum g_i c_i,\ \alpha^2 = \sum g_i\,(c_i - c_0)^2.$$

В этих условиях Борткевич выводит среднее квадратическое значение колебаний ряда, которое превысило прежнее (имевшее место при отсутствии солидарности случаев) на $[(k - 1)/n]\alpha^2$. Соответственно оказалось, что $Q > 1$. См. наш Комментарий, п. 10.]

Приложение 3

[Борткевич приводит таблицу распределения Пуассона, т. е. функции (1.2), с четырьмя значащими цифрами для $x = 0(1)7$ и $m = 0.1(0.1)1.0$; $x = 0(1)9$ и $m = 1.1(0.1)2.0$; $x = 0\ (1)12$ и $m = 2.1(0.1)3.0$.

Fletcher и др. (1946/1962, т. 1, с. 598) упоминают несколько таблиц этого распределения, включая только что указанную как хронологически первую. Авторы, правда, привели неверные значения параметра, для которых Борткевич произвел свои вычисления. По поводу Борткевича они (т. 2, с. 791) также упомянули Сопера (Soper 1914), который и допустил ошибку, повторенную ими. Сопер ни на какие другие таблицы не ссылался и заметил, что в таблице Борткевича имеются ошибки округления.

В Письме № 138 1914 г. Борткевич признался, что “по вине сестры […] в 34 случаях 4-й знак на 1 больше или меньше, чем следует”. И всё же, будучи автором, в основном виноват был он сам.]

Комментарий

Закон малых чисел (ЗМЧ) Борткевича стал всеобще известным и длительное время считался одним из основных законов статистики (Романовский 1924, кн. 17, с. 15), теперь же его полагают “устаревшим названием предельной теоремы Пуассона” (Колмогоров 1954), что верно, хотя и противоречит утверждению его автора (конец п. 18, см. цитату ниже). Но даже при таком узком истолковании заслугой Борткевича остается внедрение в статистику этой надолго забытой теоремы (которую, впрочем, Курно (1843, § 182) упомянул и рекомендовал применять в страховой математике) и, добавим мы, публикация первой таблицы распределения Пуассона, см. выше наше описание Приложения 3 автора. Уместно, впрочем, добавить, что на связь ЗМЧ с теоремой Пуассона Борткевичу указал Чупров (письмо № 2 1896 г.). Их переписку, на которую мы будем ссылаться, см. в Борткевич и Чупров (2005).

Закон Борткевича обсуждали Чупров и Марков и многие позднейшие комментаторы, из которых назовем Newbold (1927), Winsor (1947) и Quine & Seneta (1987) и нас самих (Борткевич и Чупров 2005, с. 288 – 291). Мы здесь оставляем в стороне современное математико-статистическое подтверждение согласованности теории и статистических данных в примерах Гл. 2-й. Замечание Маркова в письмах Чупрову 1916 г. №№ 71 и 84 (Ондар 1977, с. 87 и 111) и в его статье (1916), подкрепленное в работе Quine & Seneta (1987), о том, что при малых числах коэффициент *Q* оказывается близким 1 вне зависимости от теоретико-вероятностных рассуждений, мы обсудим ниже. Здесь мы опишем критическое замечание Чупрова (1909/1959, с. 284 – 285) и проследим за некоторыми рассуждениями Борткевича.

Чупров справедливо заметил, что ЗМЧ можно истолковать четырьмя различными способами и что сам Борткевич (в Предисловии и в конце п. 17) пояснил его неоднозначно. В первом случае автор лишь указал на соответствие статистических данных распределению Пуассона, а во втором нечетко заявил о связи коэффициента *Q* с числом испытаний и о его убывании до единицы с этим числом.

Характерным было и явное нежелание Борткевича уточнить суть ЗМЧ, см. письмо Чупрова Маркову № 79а 1916 г. (Шейнин 1990, с. 61):

На вопросы, поставленные мной [в *Очерках*, см. выше] *Борткевич не отвечал ни в печати, ни письменно; допрашивать же его устно я не стал, так как он относится к критике закона м. чис. очень болезненно*.

Из указанного нами ниже можно, пожалуй, заключить, что Чупров не захотел сообщить Маркову о вряд ли согласующихся заявлениях Борткевича 1909 – 1911 гг. в письмах, соответственно, №№ 93, 101 и 106.

В первом письме Борткевич заявил, что под ЗМЧ он разумеет “факт согласия формулы и действительности”, – т. е. факт применимости теоремы Пуассона к статистике. Во втором случае он заявил, что его взгляды на ЗМЧ с 1898 г. не изменились, но “редко […] означает малое число повторений события, а не малую вероятность”. И еще более определенно в третьем письме: “Нельзя заключить, что я имею в виду малость *p* [вероятности] как решающий момент”. И получается так, что Борткевич был готов отказаться от теоремы Пуассона, а ведь это должно было привести к ненужности Гл. 1-й, а потому и Гл. 2-й.

И в конце п. 18 Борткевич действительно заявил, что ЗМЧ является “продолжением исследований Лексиса и […] быть может их завершением”. Последнее утверждение оказалось несостоятельным, – последующие работы Чупрова почти ничего не оставили от исследований Лексиса, – первое же подтверждает, что для Борткевича теорема Пуассона была менее значимой.

Много позже Борткевич (1915, с. 256) решительно заявил, что его ЗМЧ “полностью ориентирован” на теорию Лексиса (и напрасно возражал против применения отрицательного биномиального распределения).

Мы не будем ссылаться на позднейшие статьи Борткевича о ЗМЧ, поскольку они не относятся к нашим замечаниям, и лишь укажем, что Чупров одобрил его ответ (1908 г.) на критику Джини: “По всем пунктам твоей полемики с Джини ты, конечно, прав, но ты только напрасно слишком третируешь Джини” (письмо № 92, 1909).

Многие авторы возражали против термина *закон малых чисел*; Гумбель (1931, с. 235), например, посчитал, что более подходяще название *закон редких событий*. Из переписки Борткевича и Чупрова известно, что Чупров (письмо № 2 1896 г.) назвал выражение, выбранное Борткевичем, “заманчивым, но обманчивым”, с чем Борткевич в следующем письме не согласился. Оказывается (письмо Борткевича № 3 1896 г.), что и Лексису это название не понравилось, Марков же (письмо Борткевича № 27 1897 г.) “опять требовал” изменить заглавие. Мизес (1921/1964, с. 108 прим.) предпочел “закон больших чисел при низком ожидании” [изучаемого события].

Заметим, что Мизес (1928/1930, с. 159), хоть и упомянул “ценные разъяснения” Борткевича по теории дисперсии, но на ЗМЧ не сослался, и что эта фраза вообще исчезла из издания 1972 г. И в 1928, и в 1972 гг. он, однако, описывал теорию Лексиса.

Укажем теперь на неприятные моменты в брошюре.

1. Борткевич вывел формулу (1.16) для средней квадратической ошибки числа появления события в σ сериях, но ожидаемое число этих появлений относилось к *n* значениям, притом не известно чего.

2. В примерах Гл. 2-й Борткевич без особого обоснования заметил, что разность между некоторыми статистиками не являлась существенной. Его вывод подтвердили Quine & Seneta (1987) на основе еще не известного в 1898 г. критерия согласия хи-квадрат, но Борткевич всё же мог просто указать, что количественная проверка оказалась бы затруднительной и добавить довод в пользу разумности своего вывода.

3. В формулу (3.2) входит *n* (см. выше наш п. 1), постоянное количество испытаний. В дальнейшем изложении Борткевич неоднократно применял это обозначение, но так и не разъяснил его смысл. Лишь в последующей работе [III, п. 6] и именно в связи с единственной выделенной в том пункте формулы, равносильной формуле (3.17), четко сказано, что *s* (в 1898 г. – *n*) – это число испытаний, произведенных для вычисления одного члена ряда (3.1). См. также Newbold (1927, с. 492) и Bauer (1955/1968, с. 226).

4. Борткевич вывел формулу (3.14), которая определяла полную ошибку δ величины p_i', – приближенного значения исследуемой вероятности p_i, изменяющейся от ряда к ряду. Эта ошибка зависела от “нормальной ошибки” ε, вызванной случайными причинами, и “абсолютной избыточной ошибки” η, обусловленной колебаниями p_i относительно своего среднего арифметического. Указанные величины вошли в формулу (3.16)

$$Q = \frac{\delta(p_i')}{\varepsilon(p_i')}$$

и Борткевич показал, что по мере убывания числа испытаний Q стремилось к 1.

Его вывод был существенным, потому что пояснял возникновение так называемой нормальной дисперсии, которая, по Лексису, определяла постоянство исходных вероятностей. Вот другие нужные формулы Борткевича:

$$\delta^2(p_i') = \frac{p_0 q_0}{n} + \frac{n-1}{n\sigma}\sum (p_i - p_0)^2, \quad \varepsilon^2(p_i') = \frac{p_0 q_0}{n}. \quad (3.12, 3.2)$$

Из них следовало, что

$$Q^2 = 1 + \frac{n-1}{p_0 q_0 \sigma}\sum (p_i - p_0)^2 = 1 + (n-1)c^2,$$

что равносильно формуле (3.17). Убывание Q с n очевидно, но это означает, что оно характеризует именно количество испытаний (или появлений события, см. ниже п. 5), а не колебания вероятностей, и потому никак не решает основной задачи исследования.

И сам автор [II, п. 8] частично признал это: при умеренном количестве наблюдений (см. ниже наш п. 5) и изменении вероятностей “только в узких границах” эти колебания “почти полностью скроются”, а стабильность [а потому и дисперсия] окажется “почти нормальной, хотя, строго говоря, она лишь будет казаться таковой”.

Но самое неприятное состоит в том, что выведенное Борткевичем значение Q не связано никаким соотношением с лексисовским коэффициентом дисперсии, см. п. 5.

5. Из формулы для Q^2 (п. 4) следует, что случай $Q < 1$ невозможен, т. е. невозможны и ряды со взаимной зависимостью их членов (Лексис). Отличие от Лексиса объясняется тем, что коэффициент Q, определяемый по указанной формуле, не совпадает с лексисовым, который у Борткевича имеет вид Q'.

Позднее Борткевич [III, п. 6] разъяснил, что в его обозначениях 1898 г. $\mathrm{E}Q' = Q$. Можно заметить, что подобное равенство имеет место лишь по отдельности для числителей и знаменателей обеих величин, а этого, как пояснил уже Чупров (1916, с. 1791) в аналогичном случае, недостаточно. Впоследствии Борткевич (1918, с. 125 прим.), не ссылаясь ни на свои прежние статьи, ни на Чупрова, признал, что при указанных условиях утверждаемое им равенство не выполняется “со всей строгостью”.

Этого частичного признания было явно недостаточно: позже Чупров (1922) вычислил математическое ожидание отношения двух взаимно зависимых случайных величин и упомянул в ней соответствующую приближенную формулу Пирсона (1897 и 1910 гг.). Зависимость величин, входящих в формулы (3.3) и (3.4), очевидна. Четкие следствия из брошюры 1898 г., будь они сформулированы, показали бы, что закон малых чисел (разумеется, помимо его связи с распределением Пуассона) сводится лишь к дополнительным соображениям о коэффициенте дисперсии.

6. В заключение Борткевич провел аналогичный анализ для x_i, – для количеств появления исследуемого события в сериях или рядах i, или, точнее, для математических ожиданий x_i. Но поскольку эти ожидания пропорциональны соответствующим вероятностям, то предыдущие формулы (наш п. 4) остались в силе, а вместе с ними, – наши прежние возражения. См., однако, конец нашего п. 3.

7. Из формул Приложения 1 Борткевич использовал только несколько. Остальные формулы он вывел, как можно полагать, чтобы показать возможность ограничиться элементарными методами.

В Письме № 7 1896 г. Борткевич предложил Чупрову "дивиться" на выведенные им (и приведенные там) формулы, из которых он несомненно исходил при составлении Приложения 1. Поясняя свой образ действий, он добавил, что теперь

Согласен сделать то изменение, которого требовал Марков [очевидно, в предварительном варианте брошюры], *но не прибегая к помощи производящих функций и последовательного дифференцирования*.

Мы не нашли указанного Марковым метода вычисления моментов (пригодного для распределений вообще) даже в посмертном издании (1924 г.) его руководства, и возможно, что в 1898 г. этот метод был еще плохо известен. И, таким образом, Борткевич напрасно не воспользовался им или хотя бы не пояснил его в дополнение к своим собственным формулам.

8. В Письме № 6 1896 г. Борткевич признал, что его изложение ЗМЧ несовершенно (в чем именно?), но добавил, что при необходимости опубликует разъяснение (чего с нашей точки зрения так и не произошло).

9. Дополнительно укажем, что в письмах №№ 27, 105 и 106 1897, 1910 и 1911 гг. Борткевич сообщил о своем разочаровании замечаниями Маркова, относящимися к статистике, но, как можно понять, не к ЗМЧ.

10. Солидарность случаев (см. Прил. 2) Борткевич [IV, п. 7, пример несчастных случаев при разрыве котлов] применил для опровержения Маркова и др. (см. начало Комментария). Чупров (1909/1959, с. 235), а позднее, без ссылки на Борткевича, Geiringer (1942, с. 58), указали, что в принципе взаимная зависимость членов ряда может означать и отрицательную корреляцию между ними, – и к такому случаю вывод Борткевича, естественно, не имеет отношения. Рассуждения Борткевича плохо понятны; см. изложение того же материала у Geiringer (1942). К тому же солидарность следовало бы обсуждать не в приложении, а в основном тексте.

11. Позднейшие события усиливают наш основной вывод (п. 4). Во-первых, Борткевич так и не принял во внимание исследования Чупрова, которые, как мы уже сказали в начале Комментария, по сути опровергли теорию Лексиса. Можно заключить, что даже в переписке с Чупровым он эту тему не затрагивал; правда, его письма после 1918 г. пропали, но в ответных письмах Чупрова ни о чем подобном не говорится. Во-вторых, Чупров, по крайней мере в сохранившихся письмах, не упомянул статей Борткевича (1918) и [IV], – как можно допустить, из деликатности. Во второй статье (п. 8) содержалась примечательная фраза, относившаяся к его же первой статье 1918 г.:

В качестве критерия степени устойчивости в моем распоряжении, ввиду ее независимости от ширины соответствующего поля наблюдения, находилась существенная составляющая колебаний …

Заметим, что по Лексису эта составляющая оставалась просто неизвестной; он (§ 11) лишь представил ее в виде

$$p = r\sqrt{Q^2 - 1}\,,$$

где r было несущественной компонентой. Но из этого немедленно следовало, что p убывает вместе с числом наблюдений, потому что в силу ЗМЧ при этом убывал коэффициент Q.

Напрашивается окончательный вывод: при исследовании устойчивости статистических рядов Борткевич запутался, но ошибок своих так и не признал.

Библиография

JNÖS = *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*

Борткевич В. И., Bortkiewicz L. von (1894 – 1896, нем.), Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики. В книге Четвериков (1968, с. 55 – 137).

--- (1908), La legge dei piccoli numeri. Chiarimenti. *Giornale degli Economisti*, ser. 2, t. 37, pp. 417 – 427. Текст исходной немецкой рукописи этой статьи см. Шейнин (2007).

--- (1915), Realismus und Formalismus in der mathematischen Statistik. *Allg. stat. Archiv*, Bd. 9, pp. 225 – 256.

--- (1918), Der mittlere Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten. *Jahresber. der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 27, pp. 71 – 126 первой пагинации.

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926).* Берлин. Также www.sheynin.de

Колмогоров А. Н. (1954), Малых чисел закон. БСЭ, 2-е изд., т. 26, с. 169. Авторство этой анонимной заметки указал Ширяев (1989, с. 104).

Марков А. А. (1916), О коэффициенте дисперсии для малых чисел. *Страховое обозрение*, № 2, с. 55 – 59.

Ондар Х. О. , редактор (1977), *О теории вероятностей и математической статистике. Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова*. М.

Романовский В. И. (1924), Теория вероятностей и статистика: по некоторым новейшим работам западных ученых. *Вестник статистики*, кн. 17, № 4 – 6, с. 1 – 38; кн. 18, № 7 – 9, с. 5 – 34.

Четвериков Н. С., составитель и переводчик (1968), *О теории дисперсии.* М.
Чупров А. А. (1909), *Очерки по теории статистики*. М., 1959.
--- (1916), О математическом ожидании коэффициента дисперсии. *Изв. Имп. АН*, т. 10, № 18, с. 1789 – 1798.
--- (1922), О математическом ожидании частного двух взаимно зависимых случайных переменных. *Тр. русск. ученых за границей*, т. 1. Берлин, с. 240 – 271.
Шейнин О. Б. (1990), *А. А. Чупров: жизнь, творчество, переписка.* М.
--- , составитель и переводчик (2007), *Четвертая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de
Ширяев А. Н. (1989), А. Н. Колмогоров. *Теория вероятностей и ее применения*, т. 34, с. 5 – 118.
Bauer R. K., Бауер Р. К. (1955, нем.), Теория дисперсии Лексиса и т. д. В книге Четвериков (1968, с. 225 – 238).
Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.
Fletcher A. и др. (1946), *An Index of Mathematical Tables*, vols 1 – 2. Oxford, 1962.
Geiringer Hilda (1942), New explanation of nonnormal dispersion in the Lexis theory. *Econometrica*, vol. 10, pp. 53 – 60.
Gumbel E. J. (1931), L. von Bortkiewicz. *Deutsches statistisches Zentralblatt*, No. 8, pp. 231 – 236.
Lexis W. (1875), *Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik.* Strassburg.
--- (1876), Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung (JNÖS). В книге автора (1903, с. 130 – 169).
--- (1877), *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft.* Freiburg i. B.
--- (1879, нем.), О теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968, с. 5 – 38).
--- (1886), Über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf die Statistik. JNÖS, Bd. 13 (47), pp. 433 – 450.
--- (1890 – 1894), Gesetz; Geschlechtsverhältnis bei Geborenen und Gestorbenen; Moralstatistik; Statistik. *Hdwb der Staatswissenschaften.*
--- (1903), *Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik.* Jena.
Mayr G. von (1896a), Selbstmordstatistik. *Hdwb der Staatswissenschaften*, Suppl.-Bd. 1.
--- (1896b), Der Selbstmord. *Allg. stat. Archiv*, 4. Jg, Hlbbd 2.
Mises R. von, Мизес Р. (1921), Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. *Z. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 1, pp. 1 – 15. *Sel. Papers*, vol. 2. Providence, 1964, pp. 107 – 112.
--- (1928), *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. Wien. *Вероятность и статистика.* М., 1930.
Newbold E. M. (1927), Practical applications of the statistics of repeated events etc. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 90, pp. 487 – 535.

Pearson K. (1897), On a form of spurious correlation. *Proc. Roy. Soc.*, vol. 60, pp. 489 – 498.
--- (1910), On the constants of index-distributions. *Biometrika*, vol. 7, pp. 531 – 541.
Poisson S.-D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements*. Paris. [Paris, 2003.]
Quine M. P., Seneta E. (1987), Borkiewicz's data and the law of small numbers. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 55, pp. 173 – 181.
Soper H. E. (1914), Tables of Poisson's binomial limit. *Biometrika*, vol. 10, pp. 25 – 35.
Winsor C. P. (1947), Quotations: Das Gesetz der kleinen Zahlen. *Human Biol.*, vol. 19, pp. 154 – 161.

II. Теория статистики населения и моральной (Lexis 1903)[1]

Die Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik nach Lexis
Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik,
Bd. 27 (82), 1904, pp. 230 – 254

Предисловие

Собрание статей Лексиса и обширная рецензия на него дают возможность ознакомиться с общим состоянием статистики в то время, притом не только в Германии, но и в мире вообще. Мы полагаем, однако, что Борткевич придал слишком большое значение некоторым моментам и упустил одно важное обстоятельство.

Ну, зачем было уделять такое большое внимание проблеме свободной воли (возникшей после общего осознания сравнительной устойчивости цифр моральной статистики) и выяснению сравнительной важности моральных и физических факторов в поведении человека? И почему Борткевич не заметил возможности более свободно опираться на статистическую вероятность взамен подсчета пресловутых и почти никогда не существующих *случаев*? Ведь именно это непосредственное следствие своего закона больших чисел подчеркивал Якоб Бернулли. Еще Кеплер заметил, что общий (надо было сказать: средний) вес монет одной и той же чеканки не зависит от веса отдельных монет, а Кант (1781/1911, с. 508) прекрасно сформулировал аналогичное утверждение на примере рождаемости: "Случайное в единичном тем не менее подчинено правилу в общем".

Заметим, что Чупров написал свои *Очерки* "под непосредственным влиянием Лексиса" (с. 30), но вот о о необходимости более широкой опоры на закон больших чисел он всё-таки ничего не сказал. Лексис (1877), правда, пояснил, что приложение этого закона возможно только, если при возрастании числа наблюдений частость не изменяется монотонно и притом стремится к определенному пределу (с. 16), если ее колебания можно считать случайными (с. 31) и, наконец (с. 24), если предел частости можно действительно считать вероятностью.

Последнее условие он понимал слишком ограничительно; так, соотношение мужских и женских рождений он считал лишь функцией вероятности мужского рождения. Указанное соотношение больше 1 и вероятностью быть поэтому не может, но ведь вполне можно ввести обратное соотношение. Остальные условия Лексиса практически трудно проверить; достаточно, если они выполняются при большом числе испытаний.

Случайность Лексис (1876) понимал в основном как подчинение экспоненциальному закону; впрочем, см. Прим. 22. Борткевич уклонился от обсуждения этого вопроса.

В более общей пуассоновой форме закон больших чисел позволяет сразу же решить проблему свободной воли доказательством от противного: коль скоро показатели моральной статистики сравнительно устойчивы, можно считать, что свободная воля случайна. А более подробно о ней и о большей или меньшей значимости ее тех или иных причин пусть судят психологи и философы. Если же статистики типа фон Майра и позднего Кнаппа не желают признавать теорию вероятностей, то переубедить их невозможно, и положение изменится (и изменилось) со временем.

Заметим, что *Очерки* Чупрова написаны, как он (с. 30 изд. 1959 г.) сам указал, "под непосредственным влиянием идей Лексиса".

[1] [Из методов, применяемых в "эмпирических социальных науках", Борткевич в первую очередь назвал естественнонаучный, который в этом случае сводится к статистике, а поскольку в жизни общества требуется выявлять сравнительно постоянное и типичное, статистика вынуждена обращаться к массовым наблюдениям. Рассуждения Борткевича основаны на диссертации Лексиса (1859), посвященной законам движения и его странном утверждении о том, что "понятие силы совсем не применяется в динамике". Лексис (1874/1903, № 10, с. 239, примечание 1902 г.) вспомнил об указанном утверждении и пояснил его уравнением

$$m(d^2x/dt^2)dt = Xdt,$$

и указал, что обе его части содержат лишь величины, "зависящие от движения".

Во всяком случае, можно, пожалуй, заключить, что, по Лексису и Борткевичу, статистика – естественнонаучная дисциплина, цели которой, однако, выходят за рамки естественных наук.]

[2] "Массовые явления состоят из одиночных случаев, к исследованию которых статистика не может обращаться. Поэтому высшей научной формой, в которой она способна исследовать свой материал, оказывается схема теории вероятностей" (Лексис 1903 [с. 241]). Ибо по Лексису точка зрения этой теории характерна именно тем, что она рассматривает только определенные начальные и конечные состояния, и принципиально уклоняется от исследования причин возникновения вторых из первых. Слово *причина* имеет в теории вероятностей особое значение, совершенно отличное от обычного. По Лексису, оно понимается как "условие, влекущее за собой некоторое явление не наверняка, а лишь с определенной вероятностью". Или, как я хотел бы добавить, четким определением множества условий, которые повышают или понижают соответствующую вероятность.

Привлечение теории вероятностей таким образом служит для оценки конечных целей статистического исследования. Но этим еще не полностью определяется задача эмпирических социальных наук, которые обладают тем преимуществом перед естественными, что могут непосредственно проникать во внутренние связи между внешними явлениями и притом сводят человеческие поступки к их мотивам[2].

Таким образом, оказывается, что существует и вторая возможная форма восприятия социальных наук, которая принимает в качестве высшего понятия, имеющего действительное значение, индивидуальные мотивы, реально проявляющиеся в общественных взаимодействиях. Эта форма особенно заметна в экономике, поскольку мотивы хозяйственных действий, если не конкретно в каждом отдельном случае, то в их общем существе и характере, становятся понятными из психологических наблюдений. […]

Можно заключить: поскольку действительные мотивы остаются теми же самыми, внешние явления будут повторяться. Этот факт, как полагает Лексис, весьма отличен от естественнонаучной индукции.

[3] До сих пор речь не шла о моральной оценке взаимоотношений, из которых состоят социальные массовые явления. Но если приступить к исследованию соотношения между существующим в социальной действительности с тем, что должно было бы быть, появится третья возможная форма воззрения в социальной науке, и, соответственно, новая формально ограниченная наука, которую Лексис назвал *эмпирической социальной этикой*. Она не является наукой в обычном смысле слова (keine normative Wissenschaft), а заимствует из общих понятий те точки зрения о том, что должно быть, по которым следует распределять и сравнивать факты[3].

[4] Впрочем, мы возвращаемся к статистике. Указание Лексиса на преобразование непосредственно найденных статистических материалов в подходящую для них научную форму при помощи схемы теории вероятностей вовсе не является новым. Уже первые представители научной статистики населения руководствовались мыслью о том, что между массовыми явлениями, с которыми имеет дело статистика, и азартными играми существует реальная аналогия.

Она особенно ясно обнаруживается в том, что при достаточно обширном поле наблюдения появляются определенные статистические числовые соотношения, которые лишь незначительно изменяются во времени, например от одного года к следующему. И подобное поведение статистических чисел находит свою аналогию в результатах азартных игр, в которых, при том же условии достаточно длинных серий, также не происходит заметных изменений от одной “серий испытаний” к другой.

В азартных играх можно заранее, т. е. исходя из их условий, установить точное численное значение, около которого будут колебаться отдельные серии испытаний. И это значение называется математической вероятностью соответствующих событий, а устойчивость результатов игры в различных сериях объясняется тем, что каждый из них, выраженный отношением соответствующих чисел случаев, можно считать приближенным значением подходящей математической вероятности. Чем многочисленнее здесь испытания в каждой серии, тем меньше количественное уклонение соответствующих отношений от основной математической вероятности.

Так можно популярно изложить закон больших чисел. Говорят, что опыт подтверждает эту теорему теории вероятностей, если эмпирически найденные соотношения достаточно точно совпадают с априорно установленной вероятностью. Но в статистике здесь имеет место нечто иное; именно, в принципе запрещается заранее устанавливать значения вероятности. Из полученных числовых соотношений можно лишь заключить о значении лежащей в их основе математической вероятности. Таким образом, о подтверждении закона больших чисел по опытным данным можно говорить лишь в смысле совпадения этих соотношений друг с другом[4].

[5] Но как близко в действительности происходит это совпадение? Как раз на этот вопрос, которым предшествующие авторы и особенно классики теории вероятностей пренебрегали[5], обратил Лексис свое внимание и показал, как его следует методически разрешать. Именно в этом состоит новое и самостоятельное в его точке зрения на приложение теории вероятностей к статистике.

Прежде всего для проверки устойчивости статистических рядов устанавливается теоретически обоснованное мерило, подобное которому предлагает закон больших чисел, если его данное выше популярное определение заменить точной математической формулировкой. Именно, существует точно установленное теоретико-вероятностное отношение между протяженностью интервала, внутри которого колеблются эмпирические значения математической вероятности, и числом испытаний или наблюдений, на котором основаны эти значения.

И поэтому можно заранее до некоторой степени установить среднюю величину уклонений отдельных членов статистического ряда от соответствующего среднего значения соотношения, доставленного всем рядом, и притом указать с определенной степенью приближения как эти уклонения распределятся по величине. Для этого требуется лишь знание среднего значения и числа наблюдений, а вид и характер массового явления, которые привели к полученному соотношению, вообще не играют никакой роли.

Выведенное таким образом теоретическое среднее уклонение (о распределении уклонений по величине упоминать пока не будем) можно будет теперь сравнить для каждого статистического ряда с действительно полученным. Рассматривая это сравнение чисто формально, следует различать три случая: действительное среднее уклонение примерно равно, меньше или больше соответствующего теоретического. И эти случаи Лексис назвал нормальной, сверхнормальной и поднормальной устойчивостями.

[6] Раз теоретическое правило для исследования относительных статистических чисел на устойчивость установлено, можно проводить само исследование. Вначале Лексис занялся соотношением мужских и женских рождений. Он исходил из помесячных данных по отдельным административным округам Пруссии за два года и составил ряд из 24 членов для каждого из них. Уже при рассмотрении округов совпадение средних эмпирических уклонений с теоретическими было за малым исключением удовлетворительным. И критерий нормальной устойчивости оказался тем более соблюденным для всех округов совместно, поскольку здесь произошло выравнивание отдельных данных.

Лексис кроме того учел распределение отдельных уклонений по их величине и установил, что в этом отношении совпадение теории и опыта было также очень хорошим. Подобные же результаты он получил для Англии и Франции, но уже для годовых, а не месячных данных, по отдельным графствам и департаментам соответственно. Лексис заключил, что отношения мужских и женских рождений, умноженные в тысячу раз[6], относились к тем статистическим данным, которые (по крайней мере для определенного периода времени и данной географической области) могут считаться случайными видоизменениями типичного нормального отношения. И это своеобразие можно понимать не в обычном смутном, а в строгом математическом смысле.

Для теории вероятностей типичное нормальное среднее – это настоящее среднее, так что вероятность заданного уклонения от него может быть выражена определенной функцией. Иными словами, изменчивость соотношения полов может быть объяснена схемой теории вероятностей. "Эти 816 [34x24] чисел, которые мы установили для соотношения мужских и женских рождений в 34 прусских административных округах, распределены приблизительно так, будто из урны с черными и белыми шарами в соотношении 1063 к 1000 24 раза извлекаются шары, неизменно с возвращением каждого из них, и притом в количестве, равном средней месячной рождаемости в отдельных округах, а затем число черных шаров, оказавшихся в каждой серии извлечений, делится на соответствующее число белых, и полученная дробь умножается на 1000".

Если представить физиологическую причину этого явления, то, по Лексису, наиболее просто будет принять, "что уже очень большое число неоплодотворенных зародышей в женских яичниках заранее предназначены для одного или другого пола, и притом у всех женщин. И, – чтобы прежде всего сформулировать строгое схематическое допущение, – число мужских зародышей превышает число женских в том же соотношении". "Аналогия с урной теперь ясна: каждое оплодотворение следует сравнить с извлечением черного или белого шара из той же самой урны"[7].

Впрочем, предположение о постоянном соотношении для всех оплодотворяемых женщин по существу и не требуется. "Могут быть существенные индивидуальные различия, коль скоро среднее соотношение […] оказывается примерно постоянным от одного района к другому по крайней мере в течение определенного периода. Колебания этих месячных или годичных соотношений в данном округе могут происходить только, если они носят случайный характер”.

[7] На этом закончим данную тему. Вполне аналогично, соотношение мужских и женских смертей для детей примерно до пятилетнего возраста также выказывает примерно нормальную устойчивость.

Таким образом, по Лексису, имеет место постоянный комплекс условий, благодаря которому умирает больше мальчиков, чем девочек. Существенных внешних помех, которые могли бы время от времени несколько изменять смертность либо того, либо другого пола, видимо, нет. Скорее следует принять, “что ввиду органических [физиологических?] причин сопротивляемость смерти у мальчиков в постоянном соотношении слабее, чем у девочек”.

Совсем иначе обстоит дело с устойчивостью этой статистической величины в более поздних возрастах. Действительное среднее уклонение в этом случае часто многократно превосходит ожидаемое (теоретическое), так что следует заключить, что здесь энергично действуют и существенные переменные причины, которые влияют именно на тот или другой пол. И фактически, как полагает Лексис, условия жизни и сопутствующие опасности у обоих полов столь различны, что изменения их самих [?] также могут происходить независимо.

Также и в этом примере, поскольку рассматриваются более поздние возрасты, имеет место ярко выраженная поднормальная устойчивость, и для соотношений статистики населения и моральной это вообще оказывается правилом. Колебания, которые испытывают эти числа [какие ?] из года в год, даже если они не представляются значительными, в большинстве случаев никак не соответствуют норме, устанавливаемой теорией вероятностей[8]. Однако, в высшей степени показательно, что подобные расхождения оказываются сильнейшими при большом числе наблюдений, и, напротив, проявляются намного слабее при меньшем числе. Да, сокращая это число уточнением содержания статистического материала или его пространственным или временным охватом, можно достичь весьма выраженной поднормальной, а иногда почти нормальной устойчивости. Этот эмпирически обнаруженный факт и его всеобще действенное теоретическое объяснение не является наименьшей заслугой Лексиса[9].

[8] Обычная схема теории вероятностей, которая применяется к статистическим рядам относительных чисел, это схема неизменной вероятности. Она подразумевает, что все члены ряда основаны на одной и той же вероятности [исследуемого события], так что все они вследствие закона больших чисел оказываются ее приближенными значениями. Эту схему Лексис видоизменил; он допустил изменение абстрактной или теоретической вероятности, и каждый член ряда стал соответствовать своей собственной вероятности, которую можно назвать специальной в отличие от средней из всех специальных для данного ряда.

Очевидно, что эта видоизмененная схема должна допускать более существенные колебания, чем первоначальная, потому что уклонения отдельных членов ряда от своего среднего значения, которое можно считать приближенным значением соответствующей средней вероятности, вызваны уже не только игрой случайных причин (из-за чего прежде всего и происходят расхождения между отдельными членами ряда и соответствующими специальными вероятностями), но и неравенством специальных вероятностей.

Действие случайных причин выражается “нормально-случайной составляющей колебания”, как ее назвал Лексис, и может быть достаточно точно определено теоретически [в соответствии со сказанным выше про их игру]. Вторая причина (изменения специальных вероятностей) выражается в “физической составляющей колебаний”, опять-таки как ее назвал Лексис. Здесь имеется в виду, что эти изменения не являются следствием сочетаний случайностей, но могут быть отражением произвольно вызванными изменениями основного комплекса условий во времени.

В соответствии с определенной математической формулой[10] обе составляющие совместно приводят к “полному колебанию”, которое определяется по непосредственному наблюдению уклонений отдельных членов от их среднего. Эта формула позволяет также приближенно устанавливать “физическую составляющую колебаний”.

Тогда как нормально-случайная составляющая зависит от числа наблюдений и убывает с их возрастанием, физическая составляющая, очевидно, в общем не зависит от него. Из этого следует, что для данного массового явления при сравнительно большом числе наблюдений главной является физическая составляющая, а при их сравнительно малом числе преобладающей оказывается нормально-случайная.

Если соответствующие специальные вероятности изменяются во время наблюдения ряда лишь в тесных границах, то при умеренном числе наблюдений физическая составляющая колебаний окажется почти незаметной, и нормально-случайная составляющая будет почти равна полному колебанию. Иначе говоря, ход наблюденных относительных чисел будет достаточно точно соответствовать гипотезе постоянной вероятности, и устойчивость окажется почти нормальной, что, строго говоря, будет лишь казаться[11].

Таким образом, совпадение теории вероятностей и статистического опыта в смысле обычной схемы постоянной вероятности можно ожидать намного скорее, ввиду, так сказать, внутренней необходимости, при малом, а не при большом количестве наблюдений.

Отсюда, однако, вовсе не вытекает в качестве аксиомы статистического исследования, что следует придерживаться малых чисел и соответственно приводить в порядок статистический материал. Напротив, чаще всего более важно установить физическую составляющую колебаний, скрытую при умеренном числе наблюдений. Ибо ее численное выражение является не зависимым от действия “случайных причин” мерилом величины временных изменений основополагающей вероятности.

При этом следует обращать внимание на возможное повышение или понижение последней во времени. Величина и направление подобных изменений, поскольку речь идет об исключении случайностей, определяется тем надежнее, чем многочисленнее наблюдения, на которых покоятся соответствующие относительные числа. Итак, уменьшение числа наблюдений не требуется ни для чего, но ввиду общего научного интереса возможно имеет смысл исследовать статистические ряды, образованные небольшими числами наблюдений и приводящие к установлению примерно нормальной устойчивости. Тем самым будет опытным путем доказано, “что теоретический закон колебаний, основанный не на неизбежности, а на сочетании случайностей, играет главную роль в [изменениях] числовых отношений”.

[9] Для пояснения появляющейся устойчивости не требуется допускать никаких “внутренних уравновешивающих связей” между элементами массового явления. Это было бы необходимо только, если выведенная из наблюдений мера колебаний оказывается меньшей, чем устанавливаемая в соответствии с теоретической схемой постоянной вероятности. Аналогичным было бы появление в азартной игре некоторого результата с совершенно невероятными постоянством и закономерностью.

“Тогда следовало бы принять, что казалось бы отдельные изолированные результаты не обладают той независимостью друг от друга и от конечного численного результата, которая имеет место при отдельных испытаниях с урнами [с возвращением каждого извлеченного шара] или при игре в рулетку. Иными словами, подобная верхняя граница превосходящей устойчивости относительных чисел будет указывать на то, что исследуемое массовое явление либо является внутренне объединенным, либо подчиняется определенному регулирующему вмешательству или определенной норме. Такое явление более или менее принадлежало бы к области планомерного устройства или управляющего закона”.

И, на самом деле, в тех массовых явлениях, которые относятся к области статистики населения или моральной и в основе которых не лежит никакое видимое установление, никогда не была выявлена наднормальная устойчивость, максимальной же, как доказано, является для них нормальная.

Поскольку это доказано, колебания ограничены более широкими или в крайнем случае теми же границами, что и результаты многих серий извлечений из урны с черными и белыми шарами. По этой причине, полагает Лексис, можно поубавить обычное прежнее чрезмерное удивление сравнительным постоянством различных относительных чисел статистики населения и моральной.

Остается, однако, желание добиться до некоторой степени понимания реального, физического смысла подобного [постоянного] отношения, т. е. “основополагающей вероятности”, потому что, говорит Лексис, “чисто математическая вероятность сама по себе не имеет никакой связи с действительностью и лишь дает повод к комбинаторной задаче с предположенной равновозможностью благоприятных и неблагоприятных случаев”.

Самое существенное в исследовании, которое у Лексиса служит для того, чтобы показать почему понятие математической вероятности приобретает смысл и значение для статистической действительности, можно воспроизвести примерно так. Прежде всего, мы имеем в виду аналогичную область азартных игр и представляем себе, что бесконечное множество “возможностей”, из которых следует определенный результат, находится в определенном числовом отношении с суммой всех соответствующих “возможностей”[12], и вероятность этого результата понимается в смысле подобного числового отношения. И считается убедительным, что при достаточно длинной игре проявляется подобное арифметическое отношение. Таким образом, результат игры сводится к ее “общим условиям”, так что конкретные причины, приводящие к отдельным случаям, из которых, однако, состоит этот общий результат, как бы нейтрализуются.

[10] Вполне аналогично следует рассматривать массовые явления в области статистики населения и моральной. Здесь тоже надо отвлекаться от индивидуальных своеобразий отдельных случаев и воспринимать статистический результат как вызванный общими до некоторой степени сверхиндивидуальными причинами. Среди последних решающее значение имеют природа человека, и, поскольку речь идет о моральной статистике, его психика. Но не природа и психика отдельного человека в их конкретном оформлении, а людей вообще, “абстрактного человека”, как выразился Лексис. И, конечно же, здесь надо придерживаться не естественнонаучного, а социального понятия человека, в соответствии с тем, как второе понятие происходит из первого ввиду особенностей заданной среды.

Пусть подобное восприятие подтверждается совпадением статистического опыта с теорией вероятностей. Тогда, по Лексису, основное здесь то, что отдельные лица, которые в различные моменты времени могут испытывать определенные состояния или совершать определенные действия, до некоторой степени взаимозаменяемы в отношении этих состояний и действий. Лица различных поколений могут в той или иной связи рассматриваться до определенной степени как взаимозаменяемые. По Лексису, человеческие действия сами по себе “в основном индивидуальны, поскольку они определяются неисчислимым множеством способов характером и энергией возбужденной воли и компетентностью одиночек”. Поэтому указанные действия сами по себе оказываются полностью вне рамок естественных закономерностей[13]. Но это вовсе не исключает того, что “люди, взятые в большом числе, выполняют определенные действия соразмерно и регулярно повторяют их, потому что как раз возможно, что многие совпадающие друг с другом причины для выбора цели оказываются решающими в определенном направлении и длительно действующими”. Отсюда следует упомянутое представление о “взаимозаменяемости отдельных лиц”, которое еще более частично упраздняет индивидуальность.

С этим, как я полагаю, вполне точным и плодотворным представлением очень неплохо уживается другое, а именно возможность распределения групп лиц по физическим, духовным, экономическим и социальным признакам, на которой основаны демографические и морально-статистические исследования. Для таких групп существуют численно различные вероятности наступления тех или иных событий. Для одних эти вероятности быть может близки к единице, для других они составляют убывающий ряд, члены которого в конце концов выражаются исчезающее малыми отношениями. И часто можно присоединить новые группы, для которых без сомнения вообще не существует возможности некоторого события, как, например, если годичное число рождений относить к общему количеству населения[14].

И можно полагать, что разделение на группы проведено так полно, что они оказались однородными, т. е. что дальнейшее их разделение на группы, обладающие различными вероятностями соответствующих событий, уже невозможно. Можно вполне сказать, что подобные “элементарные” группы, как я хотел бы назвать их[15], недоступны для статистического опыта. Даже при таких исследованиях в области статистики населения и моральной, при которых материалы специализируются в наивысшей степени, всегда еще приходится иметь дело с такими группами, которые далеко не соответствуют понятию элементарной.

Элементарные группы поэтому имеют чисто теоретическое значение, и притом прежде всего в связи с тем, что “взаимозаменяемость отдельных лиц” требуется принимать лишь в такой степени, в какой рассматриваются члены аналогичных элементарных групп. И, чтобы лучше представить действительно достигнутое наблюдение сравнительной устойчивости статистических относительных чисел, необходимо кроме взаимозаменяемости принять во внимание примерно постоянное составление наблюденной группы из элементарных или однородных частей. Само по себе это составление не устанавливается, можно лишь допустить, что испытываемые ими изменения во времени в общем те же, что и выясненные статистически в подобных группировках. […]

Лексис указывает, что прежде всего рассматриваемое распределение населения по полу и возрастным группам происходит главным образом по причине определенных естественных закономерностей условий и поэтому может изменяться только медленно. Эта устойчивость биологической конституции населения является основным условием относительной непоколебимости социальных и экономических условий и сильнее всего выражается в распределении имущества и доходов и расчленении населения по профессиям и занятиям. “Различающиеся по этим признакам достаточно крупные общественные группы”, говорит Лексис, “несмотря на непрестанные изменения в составе их членов, подвергаются лишь медленным изменениям, в основном до некоторой степени параллельным приросту населения. Это следует просто из естественной длительности общественных состояний и соотношений и допускает исключения лишь при серьезных разрушительных катастрофах”.

Таким путем всё же в качестве пояснения примерного постоянства соотношений между группами вновь оказывается учет закономерных изменений состояний, и сам Лексис признает, что эта закономерность есть первичное явление. Можно, однако, мыслить себе изменения состояний внутри однородной группы и поэтому всё теоретическое построение, при котором лучше представляется устойчивость статистических отношений в неоднородных группах, не сводится, однако, к порочному кругу.

В конце концов по Лексису разрешается, следовательно, выводить статистические закономерности из определенной взаимозаменяемости людей и определенного постоянства социальных групп. Однако, эта точка зрения не дает никакого представления о подробностях появления устойчивости статистических отношений, которые на самом деле вытекают из запутанного разнообразия явлений, хотя по крайней мере не препятствует их предположительному отнесению к господствующим законам, .

[11] До сих пор было в общем принято, что статистические отношения, устойчивость которых исследуется с точки зрения теории вероятностей, чисто формально могут рассматриваться как выражения математических вероятностей[16]. И здесь можно добавить, что в формулах соответствующих отношений знаменателями являются числа наблюденных случаев какого-либо вида, а числителями – числа тех из них, при которых произошло определенное событие или установлен определенный признак. Другими словами, числители должны происходить из знаменателей. И эти отношения свидетельствуют либо о реальном процессе, либо о чисто логической операции выделения частичной группы из общей в соответствии с какой-либо точкой зрения. В первом случае Лексис [1877, с. 4] говорит о “генерических”, во втором – об “аналитических” относительных числах.

Сама по себе вытекает теоретическая задача: показать, каким образом по данному статистическому материалу следует вычислять числа, которые можно будет считать генерическими и притом установить принципы группировки данных, чтобы доказать возможность вычисления того или иного генерического относительного числа. Известно, что особенно в прежние времена многократно ошибались по поводу истинных основных положений таких вычислений. К генерическим относили статистические величины, которые на самом деле таковыми не являлись.

Предстоящее уточнение этой небрежной практики, в первую очередь в области статистики смертности, в 1860-е годы предсказывали в своих известных трудах Беккер, Кнапп, Цойнер и др.[17] Двое последних основывали рассуждения о методах исчисления смертности на строго систематическом и вполне общем исследовании математических связей, которые существуют между различными по времени и возрастам группами живущих и умерших. Эти основы теории исчисления смертности, или, как ее можно назвать, *формальной теории населения*, Лексис теперь излагает с помощью оригинального графического построения, которое обеспечивает бóльшую наглядность. И оно указывает, какие группы умерших и живущих следует соотносить друг с другом, чтобы установить возможно наиболее точное значение вероятности смерти, которая для статистики смертности является важнейшим генерическим относительным числом.

[12] Особая трудность, которая, впрочем, возникает при вычислении всех генерических отношений, состоит в том, что в течение периода наблюдения их знаменатели изменяются, и притом не вследствие таких явлений, чье объединение составляет числители, как например, при изучении смертности ввиду оттока и притока населения. Лексис тщательно изучал, как подчинить это обстоятельство вычислению. Как и Беккер, он вывел соответствующие приближенные формулы без обращения к исчислению бесконечно малых, хотя это средство служит хорошо и быстрее приводит к цели именно здесь. Причиной было, как он указал в предварительном замечании к своей книге, желание полностью сохранить элементарный характер изложения.

И всё же вычислительная обработка материалов статистики смертности не ограничивается установлением вероятностей смерти. Требуется еще, исходя от них, вывести порядок вымирания, и об этом Лексис также сообщил важнейшее, притом коснувшись возможности этого вывода в обход вычисления вероятностей смерти.

Изложение порядка вымирания он соответственно обобщил и на другие массовые явления помимо смертности. Речь идет об отслеживании группы людей с рождения до ее полного вымирания, но не только о наблюдении случаев смерти, после которых группа постепенно убывает, но и об учете женитьб, смерти супругов, родов у женщин и подобных изменений состояния. Требуется, как выразился Лексис, установить "демографический жизненный путь" группы. Для полного наблюдения действительного поколения нужно было бы, однако, примерно сто лет, "так что этот путь можно только установить вычислением для идеального поколения, притом предполагая, что различные изменения состояния в каждой возрастной группе происходят так, как в данный момент".

Всё построение приводит к научно значимому результату очевидно лишь при условии, что эти вероятности выказывают определенную устойчивость. Ибо только тогда будет описано "типичное" явление не в смысле изменения состояния, которое происходит у каждого при одних и тех же обстоятельствах, а в смысле этих изменений у "абстрактно рассматриваемых людей" с определенными вероятностями. По Лексису, абстрактный человек не характеризуется никакими определенными свойствами, а в каждом отношении у него с определенными вероятностями проявляются противоположные свойства [?]. И в этом его отличие от "среднего человека" Кетле, по сравнению с которым абстрактный является, так сказать, пересмотренным и улучшенным изданием.

Лексис рассматривает демографический жизненный путь абстрактных людей как “естественную путеводную нить” для удовлетворительной характеристики изучаемых отношений, но это не исключает возможности обычного способа их описания различными относительными числами, из которых демографический путь жизни не выводился бы. В этой связи он, в частности, упоминает так называемые коэффициенты смертности и пристроенные к ним другие “коэффициенты изменения”.

Они появляются, когда “число годичных изменений состояния определенного вида в некоторой возрастной группе делится на среднее число тех, которые в течение года пережили их”. Полученные таким образом относительные числа “вовсе не являются вероятностями изменений состояния в течение года или вообще конечного интервала времени, а появляются как ряд [равны сумме] бесконечного числа бесконечно низких вероятностей, которые в течение периода наблюдений указывают, что наблюденные лица в последующем бесконечно коротком промежутке времени испытают соответствующие изменения”. И в соответствии со способом их вычисления коэффициенты изменения не поддаются дальнейшей теоретико-вероятностной обработке, подобной исследованию устойчивости статистических рядов.

[13] Иначе в указанной связи обстоит дело с относительными числами, которые сами по себе не являются ни генерическими, ни аналитическими и потому могут считаться приближенными значениями не конечных вероятностей, а скорее их функций. Теоретическая мера колебаний таких относительных чисел, как, например, соотношения чисел мальчиков и девочек среди новорожденных, может быть установлена по известным правилам теории вероятностей [III, п. 7]. Это особенно верно также и для статистических средних значений, когда их полагают образованными из ряда отдельных значений, обладающих различными вероятностями. Подобным образом, т. е. как колебания относительных чисел, появляющихся в качестве вероятностей или их функций, в демографии могут быть определены учитываемые в первую очередь антропометрические величины и годичные колебания, испытываемые их средними значениями.

Реальную устойчивость этих антропометрических средних значений можно было бы сравнить с ожидаемой. Подобных исследований у Лексиса нет, хотя возможно, что он с иной целью соотносил антропометрические средние значения с теорией вероятностей. Именно, он, как и Кетле до него, представлял себе функциональную структуру средних значений и пытался подчинить ее общей математической формуле, а именно так называемому закону ошибок Гаусса. К этой теме относится его теория “нормального возраста при смерти”, которая, как вполне можно сказать, стала общим достоянием [статистической] науки[18]. Поэтому позволительно было бы подробнее остановиться на этой теории.

[14] Если на основе всего сказанного отвести Лексису место в истории развития общих идей статистики населения и моральной, то самым важным было бы прежде всего указать его отношение к классикам теории вероятностей, затем к Кетле, и, наконец, к господствующим точкам зрения в современной статистике.

Как и Лаплас и Пуассон, Лексис представлял себе, что относительные числа в статистике являются приближенными значениями лежащих в их основе математических вероятностей или их функций, так что следует обратить внимание на уклонения первых от вторых. Но с какой целью? По Лапласу и Пуассону, чтобы установить степень точности статистической величины, т. е. окончательного заключения, предположительного подсчета. Тем самым перед теорией вероятностей ставилась задача предохранять статистику от ошибки судить по недостаточному числу наблюдений. Статистике следовало дать возможность различать на основе определенных формул теории вероятностей более надежные суждения от менее надежных.

Для Лексиса эта цель теории вероятностей отходит далеко на задний план. Он говорит: "Единственная цель приложения теории вероятностей к демографической и моральной статистике состоит в том, чтобы предложить, с одной стороны, понятную схему для расчленения случаев, и, с другой стороны, меру для устойчивости статистических относительных чисел". Именно второе, к чему классики теории вероятностей, в отличие от Бьенеме, Курно, и прежде всего Лексиса, не выказывали никакого интереса[19], привело его к убеждению, что схема постоянной вероятности, на которой по необходимости основывалось определение точности статистических результатов в смысле Лапласа, была подходяща для массовых явлений в человеческом обществе лишь в редчайших случаях.

Из этого, однако, следовало, что для предсказания ширины интервала, внутри которого будут находиться статистические числа, подобного установления точности, вообще говоря, вовсе не следует применять. Оно поэтому в существенной мере лишается практического значения, и Лексис не придавал ему никакого особого веса. Далее, ярко выраженное отличие между Лексисом и особенно Лапласом проявляется в том, что последний не полностью учитывал формальные условия (т. е. те, которые заложены в основу способа вычисления статистической величины), среди которых можно назвать возможность представления относительного числа как приближенного выражения некоторой математической вероятности, Лексис же тщательно принял их во внимание.

И то обстоятельство, что значения математической вероятности для частичных групп могут быть различны, Лаплас вовсе не принял во внимание при выводе соответствующих формул[20], Пуассон же учел это не так тщательно, как Лексис. Но ясно, что точки соприкосновения и различия между представителями теории вероятностей с одной стороны и Лексисом с другой, могут относиться не ко всей его теории, а в основном лишь к ее специфической математической части. Поскольку в этой области особенно Лаплас вышел из математических рамок[21], более глубокое отличие между его представлениями и точкой зрения Лексиса оказывается тем, что для человеческого познания Лаплас придавал схеме теории вероятностей всеобъемлющее значение, тогда как Лексис, как мы видим, считал ее подходящим средством лишь для определенных задач.

[15] Лексис не избежал влияния Кетле, и это яснее всего проявляется в уже упомянутой теории нормального возраста при смерти и связанным с ней общим рассмотрением антропометрических средних значений. И, как я полагаю, оба эти теоретика имели два общих основополагающих воззрения, которые являлись направляющими для статистического мышления.

Первое относится к постоянству относительных чисел статистики населения и моральной. Для Лексиса оно также носило общий характер, и должно было быть принято за исходное начало всех дальнейших статистических исследований. Лексис притом неоднократно указывал, что это постоянство вряд ли оправдывает ожидания, которые возбудил Кетле. Да, он отличался от Кетле даже тем, что считал самым интересным в цифрах моральной статистики и быть может в числовых отношениях статистики населения не устойчивость, а изменчивость. Существенные изменения значений статистических величин, полагает Лексис, “непосредственно указывают на изменения системы причин соответствующих явлений. Для социальных наук без сомнения важнее установить эти причинные связи, нежели доказать, что колебания определенных статистических отношений соответствуют закону чисто случайных уклонений[22] от средних значений”.

Но было бы совершенно неверно относить подобные высказывания к общепринятому антикетлетизму. Подчеркивая интерес к изменениям чисел, Лексис имел в виду конкретные цели статистических исследований, которые должны направляться мнением о том, что остающиеся без изменения общие условия социальных явлений приводят к примерному постоянству числовых отношений. Как можно было бы иначе делать заключения об изменении общих условий или их определяющего комплекса по изменению чисел? Необходимость массового наблюдения, которые составляют сущность каждого статистического исследования, Лексис обосновывал тем, что относительное постоянство проявляется не в отдельных событиях, а лишь в их сочетании в группы или массы. И для него, как и для Кетле, примерное постоянство числовых результатов статистики населения и моральной, которое, конечно же, не всегда должно наступать, но непременно условно постулируется, неразрывно связано с принципом статистического метода.

Вторая основная точка соприкосновения у Лексиса и Кетле состоит в том, что, поскольку речь идет о конечных целях статистических исследований, группы или массы людей, с которыми происходят определенные события, появляются лишь как средство для познания. Они не являются действительным объектом изучения, не объектом высказываний статистики населения и моральной как науки, представляющих для нее высшую степень познания.

Истинный объект таких высказываний – это скорее человек, рассматриваемый как типичное явление, “средний человек” по Кетле и “абстрактный человек” по Лексису. Но речь здесь вовсе не идет о роде человеческом вообще, потому что статистических результатов, пригодных для подобного абстрактного человека, следует ожидать только в крайнем случае и притом в исторических и не подверженных социальным влияниям явлениях. В остальных случаях как правило имеются в виду люди, разграниченные по пространственным, временным и иным признакам, соответствующим данной задаче. Таково сродство точек зрения Лексиса и Кетле.

По поводу противоречий между ними прежде всего укажем, что значимость относительного постоянства статистических результатов у них различна. Коротко говоря, один из них отыскивал пояснение устойчивости чисел в схеме теории вероятностей, тогда как для другого подобное восприятие, хоть и не вполне чуждое ему, всё же находится более или менее на заднем плане, оттесненное истолкованием статистических закономерностей “естественными законами” или “механически”. С этим вопросом связана склонность Кетле и его надежды подвести под такие закономерности математические формулы, сравнимые по своей сути и значению с формулами физики, Лексис же подобные формулы решительно отвергает, признаваясь тем самым, что убежден в отличии своего мнения о конечных целях статистического исследования от утверждений Кетле.

Но главным является фундаментальное различие во всём научном облике этих двух ученых. Их общее – это всеобъемлющий характер научных интересов и образования в сочетании, у Кетле, со смелым полетом мысли и редкостным талантом популяризатора, но также и с определенной неспособностью четко отграничивать научные задачи, строго придерживаться теоретических построений и следовать за ними вплоть до их заключительных следствий, обращением с материалами научного опыта без буквоедства, но несколько легкомысленно.

У Лексиса, однако, мы видим ясное понимание границ и целей различных отраслей науки и принципиальных своеобразных черт различных научных методов, логичность мысли и основательность и строгость исследования. И поэтому математическая часть статистики у Лексиса проявляется в гораздо более высокой степени чем у Кетле.

В отношении Лексиса к Кетле имеется один и только один момент основополагающего значения, а именно его высказывание о восприятии статистических закономерностей с точки зрения естественных законов. Этот момент подводит его, – я имею в виду Лексиса, – к тем представителям социологических и философских наук, которые в Германии в предыдущем поколении вели литературные баталии с Кетле и его последователями. Соответствующие полемические произведения могут в известной степени рассматриваться как основные для той точки зрения в теории статистики, которая сегодня господствует, особенно в Германии и всюду в сфере влияния немецкой науки.

[16] Для описания этой точки зрения, притом с особым выделением противостоящего Лексису мнения, могут послужить следующие замечания. Прежде всего противники Кетле признают постоянство чисел лишь весьма незначительным фактом. Оно вовсе не оказывается всеобщим явлением, а если и проявляется, то основывается на недостаточном понимании как нечто, либо требующее особого объяснения, либо даже таинственное. Поскольку имеются в виду именно относительные числа в моральной статистике, их устойчивость является следствием в общем-то остающихся без изменения мотивов, в соответствии с которыми происходят людские поступки. Кстати сказать, мне прямо-таки непонятно, как возврат от определенной устойчивости рассматриваемых в массе поступков к их мотивам может в какой-то степени прояснить дело. […]

Ссылка на мотивы (или на причины в тех случаях, когда поступки не зависят от человеческой воли) не решает, а лишь сдвигает проблему статистической устойчивости. Требуется не рассмотрение законов представляющегося многообразия самого по себе, а изучение их поведения по отношению друг к другу и характерного в нем, чтобы тем самым подойти к понятиям учения о случае[23], которое является основой теории вероятностей. Однако, новые авторы решительно оспаривают право прилагать эту математическую дисциплину к статистическим материалам.

Предполагать за статистическими относительными числами величины, которые выражаются ими с более или менее значительными "ошибками", было бы произвольным и излишним теоретизированием, которому в действительности ничего не соответствует. И относительные числа являются лишь "редуцированными числами", и когда вместо сотен или тысяч человек иногда считают "на душу", то появляется видимость, но только видимость, будто мы сообщаем нечто новое о единичном.

Выражения статистики населения и моральной, сформулированы ли они в абсолютных или относительных числах, неизменно относятся к группам людей, но не к отдельным лицам. Поэтому следовало бы отклонить фундаментальное для приложения теории вероятностей представление, будто статистические результаты относятся к количеству "наблюдений", равному численности группы. Объектом статистического рассмотрения является никак не отдельная, а общественная жизнь, проявляющаяся в различных группах людей, поступков и событий. События, которые по отдельности не представляют никакого интереса для общественных наук, становятся значимыми не столько закономерностью, сколько массовостью появления. Статистика была бы не *предсказующей*, а *описательной* наукой, которая при случае может устанавливать аналогии между различными периодами времени, но не какое-то принципиальное различие между ними[24].

[17] Видно, что по поводу самых важных моментов существует глубокое противоречие между господствующей ныне сверхреалистической точкой зрения и теорией Лексиса. Но каково его практическое значение? Быть может оно никак не касается повседневной работы статистика. Но прежде всего следует учесть, что описанные выше теоретические взгляды на самом деле не проводятся в жизнь последовательно. И именно, полагать возможным полностью обойтись без круга идей теории вероятностей означает в определенной степени обманывать самого себя.

Фактически же даже самый яростный противник аналогий с азартными играми пользуется представлениями, которые относятся именно к этой области. Ведь научно ориентированный статистик ежедневно спрашивает себя, не обеспечивает ли имеющийся цифровой материал взаимного уничтожения или выравнивания случайностей. И, не имея такого намерения, и не подозревая этого, он обращается к теории вероятностей, притом неметодически, в грубой манере чистого эмпирика. И в равной мере ошибаются те, кто, как я почти хотел бы сказать, с некоторой гордостью заявляют, что статистика никак не предсказывает. И они полностью заблуждаются, если притом полагают, что запросы практики соответствуют административному управлению.

Можно без особого преувеличения скорее сказать, что для управления смысл существования любого статистического материала состоит в его практическом применении в будущем. Управление, как и любая практическая деятельность, в первую очередь интересуется вопросом, какими при определенных предположениях окажутся некоторые отношения. Мероприятия администрации, которая желает что-либо выяснить из статистики, поэтому и направлены соответственно. Знание прошлого для нее важно только, если полученные прежде результаты могут быть в той или иной форме перенесены в будущее. В конце концов дело идет о предсказаниях, основанных на допущении относительной устойчивости массового воздействия определенных административных мер. В общем и целом, следовательно, изрядно распространенное в современной теории статистики мнение не приводит в практике ни к какому ущербу, что отчасти происходит, как видно, потому, что на самом деле этой точки зрения всерьез не придерживаются. Такова была бы одна точка зрения.

Во-вторых, само по себе неверно полагать, что различие в мнениях о “высоких” проблемах науки должно неизбежно сказываться на всем ее протяжении. Разве мы не привыкли к тому, что в области точных наук существует полное согласие по более конкретным вопросам, хотя всё еще продолжаются споры о принципах?

Тем не менее, в статистике, как и в других науках, есть много случаев, когда теоретические воззрения самого общего характера оказывают обратное воздействие на мнения об отдельных вопросах. Лексис, например, указывает, что Адольф Вагнер, Георг фон Майр, А. фон Эттинген и другие применяли методы количественного установления степени устойчивости различных статистических рядов, которые не при всех обстоятельствах могли в достаточной мере удовлетворить требованиям разработанной им теории[25]. Можно еще, например, добавить, что так называемый репрезентативный метод, как в последнее время называют выборочный метод, может быть глубже разработан и найден в принципе допустимым только с точки зрения теории вероятностей.

Не случайно поэтому, что, например, фон Майр, который отвергает теорию вероятностей в качестве основы теории статистики, проявляет некоторую вражду и по отношению к этому методу. Я кроме того отсылаю к известному методу “выравнивания” числовых значений в статистике, который, например, Кнапп, другой и возможно самый решительный и последовательный противник теоретико-вероятностных воззрений, считает недопустимым, и, со своей точки зрения, справедливо.

[18] Но методологическими вопросами, которые относятся к сбору и обработке числового материала, воздействие этих принципиальных разногласий не ограничивается. Аналогично обстоит дело с выводами из чисел. Противники теории вероятностей всё еще, например, не желают признавать, что бóльшая или меньшая устойчивость числовых результатов безусловно не допускает никаких окончательных следствий о том, какой вид причин играет некоторую или главную роль в соответствующей области явлений.

Задолго до Лексиса Пуассон (1837, с. 12) учил, что законы случая не зависят от природы причин, которые учитываются в отдельных проявлениях. Но кто думает, что эти законы не находятся ни в какой связи с предметом статистики, считает возможным решать по степени устойчивости преобладают ли в заданных случаях физические или моральные факторы. Возможно, что основным в этой связи является мнение о том, что, вообще, физические факторы порождают бóльшую устойчивость. И, соответственно, что при поступках, зависящих от воли человека, бóльшую устойчивость результатов привносят причины, которые скорее вызваны чувственной природой человека, тогда как духовные и моральные факторы влияют в противоположном направлении.

И всё же эта гипотеза не хуже, но и не лучше обоснована, чем другие предположения, которые, напротив, одобряли бы в постоянстве определенных морально-статистических результатов “победу нравственного определения воли над переменным чувственным возбуждением, победу духа над материей”. Аналогично процитированному Шмоллеру (1888, с. 203), фон Майр (1895, с. 692) позволяет себе заключить из удивительной, по его мнению, закономерности частоты самоубийств, что “в рассматриваемых социальных явлениях дело идет о событиях, являющихся следствием мощного и серьезного телесного и духовного процесса, на который мало влияют внешние стеснительные обстоятельства”.

Так ведь относительно большая устойчивость чисел самоубийств, которая, впрочем, далеко не доходит до наивысшей (нормально случайной), на самом деле свидетельствует, что, например, экономическая конъюнктура в общем никак не имеет тут решающего значения. Намного более серьезными могли бы быть такие моменты, которые не изменяются значительно от года к году. Происходят ли самоубийства скорее по упрямству и легкомысленному высокомерию или в результате зрелого размышления и длительной душевной борьбы, как полагает фон Майр, из большей или меньшей устойчивости чисел установить нельзя. Иногда, впрочем, вполне ничтожные происшествия оказываются весьма устойчивыми. Шмоллер (1888, с. 195), например, полагает кроме того, что степень устойчивости зависит от числа причин, которые действуют в заданном социальном массовом явлении, так что при его возрастании колебания усиливаются. Но и это предположение противоречит теории вероятностей.

Но достаточно примеров. Я полагаю, что можно считать доказанным, что общая теория статистики, основанная на "учении о случае", не является такой уж несущественной для практики статистических исследований, как это неоднократно принималось. И тот, кто эту теорию продвинул так значительно, как Лексис, имеет косвенные заслуги и перед практической статистикой, если даже совсем забыть, что часть его *Трудов* (1903), как, например, об исчислении смертности, находится в непосредственной связи с практикой. И всё же центр тяжести заслуг Лексиса находится в области чистой теории. Он изучил и осветил самые общие проблемы статистики населения и моральной, их предпосылки, методы и задачи, с единой точки зрения и тем самым показал, что эта наука, которую Кетле, правда, пытался приподнять до уровня "социальной физики", но затем отказался от этого, всё же заключает в себе существенно больше, чем простое ведение социального бухгалтерского учета, как ее хотели бы воспринимать некоторые чрезмерно рассудительные из современных специалистов.

Примечания

1. Борткевич перечислил статьи, составляющие сборник трудов Лексиса, см. Библиографию. Свой текст Борткевич снабдил большим числом выдержек из этого сборника без точных ссылок. О. Ш.

2. Что это действительно предпочтительно, снова недавно подчеркнул Макс Вебер (1903, с. 1215). На примере другого автора […] он в то же время показывает, как в этой связи "органическая" общественная точка зрения препятствует верному пониманию методологических обстоятельств. Л. Б.

3. Приведенные выше высказывания содержатся во вступительной лекции Лексиса, прочитанной в Дерпте [Тарту] в августе 1874 г. и впервые полностью публикуемой. Л. Б.

4. Сам Пуассон (1837, § 54), кстати, относит введенный им термин *закон больших чисел* к совпадению эмпирического относительного числа не с соответствующей математической вероятностью, а именно с другим аналогичным числом, основанным на той же вероятности. Л. Б.

5. Чуть ниже Борткевич, однако, вспоминает о точной формулировке закона больших чисел. О. Ш.

6. Смысл этого умножения (вовсе не обязательного) можно понять из дальнейшего изложения. О. Ш.

7. Вряд ли модель Лексиса, которую он ввел еще раньше (1876, с. 242; 1877, с. 73 – 74), основательна: он совсем не учитывал мужчин. О. Ш.

8. Лексис (1877) показал это на многих примерах, и можно сожалеть, что он не перенес их в свой новейший труд. Л. Б.

9. Борткевич вполне мог иметь в виду и свой закон малых чисел; впрочем, становится неясным: что же тогда нового было в нем? О. Ш.

10. Лексис вывел эту формулу в примечании на с. 196 – 197, в дополнении 1902 г. [Прим. на с. 25 – 26 русского перевода]. Уравнение $[\Delta^2] = [\tau^2] + [D^2]$ является вполне строгим. Оно, однако, основано на небольшой неточности, которую Лексис, возможно, признал и даже, видимо, переоценил, когда заменил $[\tau^2]$ на $nV(1 - V)/g$. На самом деле математическое ожидание $[\tau^2]$ равно $V(1 - V)/g$ и, при g = Const, оказывается, что $V(1 - V)/g = nV(1 - V)/g - (1/g)[D^2]$. Соответственно, вместо $R = \sqrt{r^2 + p^2}$, с. 177 [с. 11 русского перевода], имеет место более строгая формула $R = \sqrt{r^2 + [(g-1)/g]p^2}$.

Если, как требует Лексис (с. 188, с. 19 перевода) g неизменно равно нескольким сотням, то эта поправка не имеет значения даже при произвольно большом p. Л. Б.

11. Эта фраза совместно с дальнейшим пояснением фактически обесценивает закон малых чисел. О. Ш.

12. Это нечетко. О. Ш.

13. Эту точку зрения нельзя принять, если считать верным понимание взаимоотношений естественных и гуманитарных наук примерно по Виндельбанду и Риккерту. Но, поскольку имеется в виду теоретическая статистика, это в общем-то неважно, ошибался ли здесь Лексис или нет. Л. Б.

14. Лексис (1877, с. 29) указал причину: далеко не все женщины (про мужчин и говорить не приходится) способны рожать. Там же (с. 24) Лексис привел и другие примеры статистических отношений, которые нельзя считать вероятностями, в том числе соотношение мужских и женских рождений, про которое см., однако, наше предисловие. О. Ш.

Лексис исследовал этот случай подробнее. Если число лиц, с которыми это событие вообще может произойти, равно G, а число наблюденных лиц αG, $\alpha > 1$, e – число происшедших событий, то вероятное отклонение отношения [вероятности наступления события] $e/G = p$ теоретически задается формулой

$$\rho\sqrt{2p(1-p)/G}\,. \qquad (1)$$

Если теперь спросить, каково соответствующее вероятное отклонение для $e/\alpha G$, то следует различать два случая. Если считать α постоянной величиной, то ответ, очевидно, будет

$$\rho\sqrt{2p(1-p)/\alpha^2 G}\,, \qquad (2)$$

если же, напротив, полагать α обратной значению математической вероятности случайных колебаний, то ответ будет равен (1877, с. 230)

$$\rho\sqrt{\frac{2(p/\alpha)[1-(p/\alpha)]}{\alpha G}}\,. \tag{3}$$

Последнее выражение можно привести к виду

$$\rho\sqrt{(1/\alpha)^2\frac{2p(1-p)}{G}+p^2\frac{(2/\alpha)[1-(1/\alpha)]}{\alpha G}}\,, \tag{4}$$

который, впрочем, и непосредственно устанавливается по теореме о вероятной ошибке произведения двух вероятностей. Как я полагаю, эта формула указывает поистине наглядным образом своей структурой, почему во втором случае вероятное уклонение оказывается бóльшим. Если говорить о $e/\alpha G$ без учета того, что в знаменателе этого выражения содержится в известной степени "балласт" (Lexis 1877, с. 30), то к верному мерилу устойчивости можно придти только, если (1/α) представляется эмпирическим выражением математической вероятности. Но если α постоянно или подвержено изменениям в меньшей степени, чем это соответствовало бы схеме теории вероятностей, то обычные формулы для вероятного уклонения окажутся недействительными, и их применение привело бы к неверному указанию на сверхнормальную устойчивость даже если это не соответствовало бы действительности. Л. Б. В указанных формулах ρ = 0.477 … и основаны они на соотношении между средней квадратической и вероятной ошибками при нормальном распределении. Лексис (1903, № 9, с. 230) упоминает не все указанные формулы, нет у него и произведенного Борткевичем уточнения величины α, который, однако, не пояснил его смысл. О. Ш.

15. Ранее Лексис (1875, с. 119) сам применил в аналогичном смысле выражение *элементарные массы*. Л. Б.

16. Кроме того, это не подтверждается соотношением полов у новорожденных и умерших, о чем была уже речь. Подробнее об этом см. ниже. Л. Б.

17. Мы можем указать следующие источники: Becker (1874); Knapp (1868; 1869); Zeuner (1869). См. также статью [VI]. О. Ш.

18. В остальном учение Лексиса слабо повлияло на статистическую науку, тогда как, напротив, основные представители математической теории вероятностей и ее философской стороны (Kries 1886; Czuber 1899; 1903) отнеслись к ней с уважением. Л. Б.

19. См., однако, Прим. 4 о Пуассоне. О. Ш.

20. Так, Лаплас (1786), например, при определении населения Франции нисколько не сомневался относиться к нему как к числу извлеченных из урны белых шаров, а к числу ежегодных рождений – как к числу извлеченных черных шаров. В *Аналитической теории* … (1812/1886, с. 399) население было приравнено общему числу тех и других. Л. Б. Это замечание неубедительно. Впрочем, Карл Пирсон (1928), см. Шейнин (1976, с. 160), указал, что урновая схема Лапласа в принципе не соответствовала реальности, но что большого практического значения это не имело. О. Ш.

21. Это не доказано. О. Ш.

22. Под чисто случайными уклонениями Лексис (1876, с. 220 – 221 и 238) имел в виду уклонения, подчиняющиеся нормальному закону. Впрочем, он (1877, § 23) допускал и менее стеснительные условия (четность [функции плотности]) и даже заметил, что не имело смысла принимать здесь какие-либо предположения, а в конце концов (1879, п. 23) упомянул колебания *неправильными волнами.* Но он всюду принимал соотношение между средней квадратической и вероятной ошибками, соответствующее нормальному закону. О. Ш.

23. Вряд ли такое учение, снова упомянутое в п. 18, существует даже сегодня. Одним из основных понятий теории вероятностей является *случайная величина* (которая понимается в математическом, но не философском смысле), а основной задачей этой науки можно считать установление законов случая в массовых *случайных* явлениях. О. Ш.

24. Представленная, наконец, Кнаппом (1871; 1872) характерная теоретико-статистическая точка зрения является образцом чистой культуры [?]. В противоположность ему Георг фон Майр (1895, с. 117 и 186) проявляет напоказ определенное миролюбие и к Кетле, и к приложению теории вероятностей к статистике, когда наряду с "историческим" элементом научной статистики всё-таки признает ее "абстрактный" элемент, хоть и не равноценный первому. Л. Б.

25. См. по этому поводу Лексис (1879/1968, с. 6). О. Ш.

Библиография

Lexis W., Лексис В.

(1859), *De generalibus motus legibus*. Bonn.

(1875), *Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik*. Strassburg.

(1876), Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 27, pp. 209 – 245.

(1877), *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft*. Freiburg i/B.

(1903), *Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik*. Jena.

1. Die graphische Konstruktion der Sterblichkeitsverhältnisse, c. 1 – 24. Переработана в 1880 г.

2. Die Absterbeordnung, c. 25 – 40.

3. Die Sterbenwahrscheinlichkeiten unter dem Einfluss der Wanderungen, c. 41 – 59.

4. Übersicht der demographischen Elemente und ihrer Beziehungen zueinander, c. 60 – 83. Переработана в 1891 г.

5. Über die Ursachen der geringen Veränderlichkeit der statistischen Verhältniszahlen, c. 84 – 100.

6. Die typischen Größen und das Fehlergesetz, с. 101 – 129. Библиография доведена до 1902 г.
7. Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung, с. 130 – 169, 1876. Переработано.
8. Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen, с. 170 – 212. Переработана для настоящего издания. См. также ниже.
9. Naturgesetzlichkeit und statistische Wahrscheinlichkeit, с. 213 – 232.
10. Naturwissenschaft und Sozialwissenschaft, с. 233 – 251. Речь 1874 г.

Статьи 2, 3, 5 и 9 опубликованы в 1903 г. впервые. Статьи 1 и 2 переведены на русский язык под редакцией А. А. Чупрова в сборнике *В. Лексис*. СПб, 1906. Также переведена статья 8: Четвериков Н. С., составитель и переводчик (1968), *О теории дисперсии*. М., с. 5 – 38.

Becker K. (1874), *Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen*. Berlin.

Czuber E. (1899), Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. *Jahresber. Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 7, No. 2. Отдельная пагинация.

--- (1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*, Bde 1 – 2. Leipzig.

Kant I. (1781), *Kritik der reinen Vernunft. Werke*, Bd. 3. Berlin, 1911. [*Критика чистого разума. Сочинения*, т. 3. М., 1964.]

Knapp G. F. (1868), *Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik*. Leipzig.

--- (1869), *Die Sterblichkeit in Sachsen nach amtliche Quellen dargestellt*, Tle 1 – 2. Leipzig.

--- (1871), *Die neueren Ansichten über Moralstatistik.* Jena.

--- (1872), Quetelet als Theoretiker. *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 18, pp. 89 – 124.

Kries J. von (1886), *Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Tübingen.

Laplace P.-S. (1786), Sur les naissances, les mariages et les morts etc. *Oeuvr. Compl.*, t. 11. Paris, 1895, pp. 35 – 46.

--- (1812), *Théorie analytique des probabilités. Oeuvr. Compl.*, t. 7. Paris, 1886.

Mayr G. von (1895), Статья в *Handwörterbuch der Staatswissenschaften*, 1. Suppl.-Bd.

--- (1895 – 1913), *Statistik und Gesellschaftslehre*, Bde 1 – 3. Freiburg i/B. Первый том (1895) перепечатан: Тюбинген, 1914.

Pearson K. (1928), On a method of ascertaining limits to the actual number of marked members from a sample. *Biometrika*, vol. 20A, pp. 149 – 174.

Poisson S.-D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements*. Paris. [Paris, 2003.]

Schmoller G. (1888), *Zur Literaturgeschichte der Staats- und Sozialwissenschaften*. Leipzig.

--- (1900), *Grundriß der allgemeinen Volkswirtschaftslehre*, Tl. 1. Leipzig. Издание 1923 г. перепечатано в 1978 г. (Берлин).

Sheynin O. (1976), Laplace's work on probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 16, pp. 137 – 187.
Weber M. (1903), Roscher und Knies und die logischen Probleme der historischen Nationalökonomie. *Schmollers Jahrb. f. Gesetzgebung, Verwaltung u. Volkswirtschaft*, Bd. 27, pp. 1181 – 1221.
Zeuner G. (1869), *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*. Leipzig.

III. Приложения теории вероятностей к статистике[1]

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik
Enc. math. Wiss., Bd. 1, Tl. 2. Leipzig, 1904, pp. 822 – 851

1. Внедрение теории вероятностей в статистику

Мысль о появлении определенной закономерности в количественных отношениях, с которыми имела дело так называемая политическая арифметика, появляющейся лишь при достаточно большом числе отдельных наблюдений, была обычной для первых представителей этой отрасли науки. Из подобного представления вытекал методологический принцип основывать следствия и предварительные подсчеты из статистических материалов возможно более расширенного поля наблюдений[2].

Впрочем, основу для связи между этой точкой зрения и теорией вероятностей установил лишь Якоб Бернулли, который первым теоретически рассмотрел результаты повторных многочисленных испытаний и ясно сформулировал различие между *априорным* и *апостериорным* определениями вероятностей (Czuber 1899)[3]. В соответствии с *теоремой Бернулли* стало возможным легче представлять себе эмпирически выявленную устойчивость различных статистических отношений как более или менее точных значений определенных вероятностей, лежащих в основе изучаемых массовых явлений[4].

Здесь и сосредоточивается приложение теории вероятностей к статистике. Но оно выходит за пределы одного лишь логического пояснения и приобретает математическое содержание только когда определяет степень приближения этих эмпирических отношений к соответствующим абстрактным вероятностям или численно уточняет методологическое требование дальнейших наблюдений.

2. Методы Лапласа установления степени точности статистических результатов и следствий и выборочных исследований

Приложение теории вероятностей к статистике в только что указанном смысле предполагает существование аналитического представления теоремы Бернулли, которая своей удобной формой, укоренившейся с тех пор, как известно, обязана Лапласу. Он и сам применил результаты своих собственных аналитических изысканий для решения определенных статистических задач, и притом частично еще до того, как ему удалось придать указанной теории ее упомянутый окончательный вид. Вот соответствующие теоремы в их самом общем, простейшем и важнейшем для статистики виде[5].

1. Если некоторое событие произошло m раз и не наступило n раз из большого числа случаев s, а p – вероятность его появления в каждом отдельном испытании, то с достаточной точностью

$$P_t = (p - z \le m/s \le p + z) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^t \exp(-t^2)dt,\ t = z\sqrt{s^3/2mn}\ .$$

2. Пусть для двух аналогичных рядов соответствующие величины оказались равными s_1, m_1, n_1, p_1 и s_2, m_2, n_2, p_2, и

$$\delta = m_2/s_2 - m_1/s_1 > 0.$$

Тогда (Laplace 1781, § 26; 1786a, §§ 38 – 40; 1812, § 29)

$$P(p_2 > p_1) = (1/2)\ (1 + P_t),\ t = \delta\sqrt{\frac{s_1^{\,3}s_2^{\,3}}{2(m_1n_1s_2^{\,3} + m_2n_2s_1^{\,3})}}\ .$$

Эти формулы Лаплас применил для исследования соотношения мужских и женских рождений[6].

3. Пусть при определенных условиях получены результаты двух различных видов a_1 и b_1 соответственно, а в аналогичном случае – a_2 (известно) и b_2 (неизвестно). Можно считать, что $b_2 = (b_1/a_1)a_2$, притом разность между обоими частями этого приближенного равенства находится в пределах $\pm\, z$ с той же вероятностью P_t, но при

$$t = z\sqrt{\frac{a^3}{2a_2b_1(a_1 + a_2)c}}\ ,$$

$c = a + b$ или $a - b$ или $b - a$ при (b_1/a_1) и (b_2/a_2) принятых за приближенные значения $p/(1 - p)$ или p или $(1/p)$ соответственно и p равном вероятности каждого результата (Laplace 1786b). Здесь a_1 и b_1 означали соответственно числа годичных рождений и жителей в определенных департаментах Франции, а a_2 и b_2 – те же числа для всей страны. Каждый житель в этом исследовании уподоблялся извлеченному белому шару, а каждый новорожденный – извлеченному черному, так что (b_1/a_1) оказывалось приближенным значением дроби $p/(1 - p)$. Позже, однако, Лаплас (1812, § 31) заново определил число жителей Франции на основании частичной переписи и статистики рождений и уподобил его числу всех извлеченных шаров, а число новорожденных – числу извлеченных белых шаров, так что та же дробь оказалась приближенным значением $1/p$. Наконец, там же, в § 30, Лаплас привел статистический пример для случая $(b_1/a_1) \approx p$.

Указанные теоремы применяются в статистических целях либо непосредственно. либо косвенно. В первом случае вычисляют P_t, т. е. степень надежности, относительное *достоинство* определенных статистических результатов. Во втором случае для установления практической уверенности исходят из некоторого значения t, например, из $t = 2$ (Пуассон 1837, с. 372 и след.; Gavarret 1840, с. 257) или $t = 3$ (Lexis 1875, § 80 и след.) и соответствующего P_t или (1/2) $(1 + P_t)$. Здесь возможны два варианта:

1) Определять либо наибольшее уклонение найденных эмпирических значений какого-либо статистического отношения от лежащей в его основе математической вероятности; либо наибольшую разность между двумя эмпирическими значениями такого отношения, которую еще можно приписать случайности; либо, наконец, наибольшую погрешность выборочного исследования, подобного упомянутому выше лапласову.

2) Определять, сколько наблюдений следует произвести, чтобы их погрешность не превзошла определенного предела; здесь предусматривается знание приближенного значения соответствующей вероятности p.

3. Обобщение этих методов, особенно под влиянием Пуассона

С развитием статистических исследований указанные в п. 2 методы приложения теории вероятностей к статистике были обобщены в различной степени. Реже всего оценивали точность господствовавших вначале выборочных исследований (Graunt 1662, гл. 7 и след.; Petty 1683) и именно потому, что с решающим развитием всесторонних массовых наблюдений общественных явлений статистика в XIX в. постепенно отошла от них[7]. Сравнительно чаще стали прибегать к непосредственному приложению второй из указанной теорем, особенно в медицинской (в терапевтической) статистике_ для исследования действенности различных методов лечения, потому что в этой области, ввиду, как правило, сравнительно малочисленных наблюдений, особенно важно было исключать случайности (Double [Poisson, Double и др.] 1835; Navier 1835; Gavarret 1840; Liebermeister ca. 1876; von Kries 1886, гл. 9, §§ 10 и 11).

Прошло, однако, более полувека, прежде чем указанное Лапласом требование количественного уточнения степени надежности статистических результатов и соответствующего методического учета случайных уклонений начало в некоторой степени приниматься во внимание в более обширных кругах. Этому серьезно способствовал Пуассон, целесообразно придавший теореме Бернулли форму, которая, видимо, была предназначена для всех случаев, имеющих место в статистике, притом без изменения основанных Лапласом методов уточнения относительной надежности статистических результатов.

В обобщенной Пуассоном схеме Бернулли и называемой "случаем переменных шансов", интервалы действия случайных причин остаются теми же, что у Лапласа[8].

4. Учение Бьенеме и Курно о солидарно действующих случайных причинах

Бьенеме выступил против утверждения Пуассона о всеобщей применимости его схемы переменных шансов. Попытка статистически подтвердить формулы Лапласа привела его к пониманию того, что предусмотренные теоретические границы для колебания статистических отношений обычно заметно нарушаются также и в случае, когда колебания еще представляются случайными. Чтобы привести подобное поведение статистических чисел в соответствие с теорией вероятностей, Бьенеме видоизменил схему Пуассона, введя “предположение о длительности действия причин”.

Пусть система шансов, которая с вероятностью c_0 приводит к определенному событию, характеризуется значениями вероятностей различных причин $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$, и вероятностями c_i того, что событие наступит при действии причины i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Пусть, далее, s и m – количества наблюдений и появлений события, тогда вероятность того, что уклонения $[(m/s) - c_0]$ окажутся в интервале $\pm z$, выражаются по Пуассону величиной P_t, где

$$z = t\sqrt{\frac{2c_0(1-c_0)}{s}},\ c_0 = \sum g_i c_i.$$

Но это действительно только в случае, когда отдельные наблюдения полностью не зависимы друг от друга, или, другими словами, когда решающая из ν различных причин случайно определяется заново для каждого из них. В других же случаях, когда решающая причина каждый раз действует на протяжении k наблюдений, и (s/k) – большое число, та же вероятность по Бьенеме выражается величиной P_t при

$$z = t\sqrt{\frac{2c_0(1-c_0)}{s} + \frac{2(k-1)}{s}\sum g_i(c_i - c_0)^2}\ .$$

Из последней формулы усматривается, что в схеме Бьенеме интервал действия случайных причин расширяется сравнительно со схемой Пуассона и притом тем значительнее, чем больше, с одной стороны, k, а с другой – $\sum g_i(c_i - c_0)^2$. Но как раз те явления, полагает Бьенеме, обстоятельства появления которых нам лучше всего известны, предоставляют несомненные примеры “длительности причин”. Тем самым становятся понятным сравнительно большие колебания статистических отношений, а если соответствующие причины изменяются серийно, то заданные случаи вполне подходят предпосылке системы постоянных шансов[9].

Здесь лишь для упрощения принято, что каждая серия наблюдений, в течение которых причины не изменяются, состоит из k наблюдений. Ничего, однако, не мешает изменениям самого k в той или иной форме (Bienaymé 1839).

Курно (1843, §§ 79 и 117) присоединился к точке зрения Бьенеме ввиду необходимости настаивать на различии между случайными влияниями, действующими на каждое наблюдение не зависимо от остальных, входящих с ним в один и тот же ряд, от влияний, действующих солидарно на наблюдения всего ряда в целом или на отдельные его части, но всё же случайных в том смысле, что они беспорядочно изменяются от одного ряда к другому. Действие последних уравновешивается только, если объединять большое число рядов, что приводит к сугубо большому числу отдельных наблюдений[10].

Курно нужным образом продолжил мысли своего предшественника, однако не изменяя выведенных тем формул и не подтвердив статистически своей новой точки зрения.

5. Теория дисперсии Лексиса

Много позже Лексис взялся установить, в какой степени различные статистические отношения, подверженные колебаниям во времени, остаются в границах, которые по Лапласу и Пуассону определяются действием случайных причин. Примененный им для этого метод состоял в том, чтобы проследить, как отдельные значения

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_\sigma \qquad (1)$$

некоторого статистического отношения, соответствующие последовательным отрезкам времени, группируются около своего среднего $\overline{p}'$. Примем для упрощения, что каждое из этих значений основано на *s* наблюдениях. Если все они являются приближенными значениями определенной вероятности *p* и полностью не зависимы друг от друга, то можно будет ожидать, что они, упорядоченные по величине, при достаточно большом *s* и не слишком малом σ, окажутся приближенно распределенными около $\overline{p}'$ в соответствии с функцией P_t. Обозначив притом положительное уклонение эмпирического значения p'_i от абстрактной вероятности *p* через переменное *z*, получим непременное соотношение

$$t = z\sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}.$$

Примыкая к укоренившейся в методе наименьших квадратов терминологии, Лексис назвал постоянную $(t/z) = h$ *точностью*[11]. И тогда $(1/h\sqrt{2}) = \mu$ оказывается средней [квадратической] ошибкой величины p'_i. Приближенными значениями *h* и μ являются, с одной стороны,

$$h_1 = \sqrt{\frac{s}{2\overline{p}'(1-\overline{p}')}} \text{ и } \mu_1 = \sqrt{\frac{\overline{p}'(1-\overline{p}')}{s}}.$$

С другой стороны, среднюю [квадратическую] ошибку p'_i можно приближенно определить непосредственно по наблюденным уклонениям $p'_i - \overline{p}'$:

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{1}{\sigma-1}\sum(p'_i-\overline{p}')^2} \text{ и } h_2 = \sqrt{\frac{\sigma-1}{2\sum(p'_i-\overline{p}')^2}}.$$

Указанное выше ожидаемое поведение значений (1) очевидно в общем определяется по крайней мере приближенным выполнением уравнений $h_1 = h_2$ и $\mu_1 = \mu_2$. В подобном случае Лексис говорит о *нормальной дисперсии*, т. е. о таком распределении значений (1) около $\overline{p}'$, которое соответствует представлению о единой вероятности p, лежащей в их основе и о возможности приложить к соответствующему статистическому массовому явлению либо схему обычной азартной игры[12], либо пуассонову схему переменных шансов. Если же величины h_1 и h_2, μ_1 и μ_2 заметно отличаются друг от друга, то дело идет о *сверхнормальной* или *поднормальной дисперсии* при $h_1 > h_2$ и $\mu_1 < \mu_2$ или, соответственно, $h_1 < h_2$ и $\mu_1 > \mu_2$. Но и в обоих этих случаях принято, что значения (1) группируются около $\overline{p}'$ согласно функции P_t, но только аргумент t можно будет здесь определить не из любого из уравнений $t = zh_1$ и $t = zh_2$ как при нормальной дисперсии, а лишь из второго из них.

Сверхнормальной дисперсии соответствует представление о том, что та абстрактная вероятность, приближенными значениями которой оказываются величины (1), является теперь не постоянной, а также случайной и подчиняющейся экспоненциальному закону[13]. Напротив, поднормальная дисперсия указывает на особую внутреннюю связь отдельных результатов, из которых слагается соответствующее массовое явление. Лексис исследовал с указанной точки зрения степень устойчивости некоторого числа статистических отношений и установил, что для массовых явлений, связанных с людьми, самой строгой (straffste)[14] является формула нормальной дисперсии. И именно она, как оказалось, имела место для соотношения между мужскими и женскими рождениями (частично и для аналогичного соотношения между умершими). Здесь выявилось примечательное совпадение между интервалом колебаний, определенным на основе лапласовых теоретико-вероятностных формул, и интервалами, действительно имевшими место для различных стран и периодов времени. Противопоставление h_1 и h_2 привело к таким различиям, случайное происхождение которых было несомненно.

Но для многих других отношений из области статистики населения и моральной Лексис установил, что составленные таким же образом [для различных стран и периодов времени?] ряды в общем характеризуются резко выраженным неравенством $h_1 \neq h_2$, притом непременно оказывалось, что первая величина превосходила вторую, часто многократно. К тому же манера группирования отдельных значений определенного отношения около соответствующего среднего лишь как исключение допускала в некоторой степени надежное заключение о существовании сверхнормальной дисперсии: уклонения этих значений от среднего в большинстве случаев не удавалось подчинить экспоненциальному закону[15]. Если, однако, статистическая величина, чьи изменения не следуют этому закону, всё же выказывают определенную устойчивость, то (Лексис 1877, § 23)

Мы имеем чисто эмпирическое постоянство наблюденных отношений, которое не имеет никакой определенной связи с теорией вероятностей. В частности, также в чисто *эмпирическом порядке, можно заключить, что в следующем году наблюдения снова приведут к примерно тем же отношениям. Мы не можем наметить интервал погрешностей для результатов наблюдений следующего года по правилам теории вероятностей, если в имеющихся более длинных* [?] *рядах уклонения отдельных результатов от среднего распределяются со столь существенным расхождением с теорией вероятностей*.

См. также Лексис (1876; 1886; 1890 – 1894).

Результаты исследований Лексиса пересеклись с выводами Дормуа (1878, т. 1, §§ 39 – 56; 1874), который независимо пришел к мысли подобным же образом сравнивать ожидаемые и действительные колебания различных статистических отношений. В отличие от Лексиса он, однако, придерживался не средней [квадратической] ошибки[16], а среднего арифметического из уклонений $|p_i' - \overline{p}'|$. Теоретическое значение этой величины [для нормального закона] равно

$$\varepsilon = 1/h\sqrt{\pi},\ h = \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}},$$

а ее эмпирическими значениями являются

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{2\overline{p}'(1-\overline{p}')}{\pi s}},\ \varepsilon_2 = (1/\sigma)\sum|p_i' - \overline{p}'|.$$

Отношение $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ Дормуа назвал *коэффициентом дивергенции* и установил, что оно мало отличается от единицы только для соотношения мужских и женских рождений, в других же случаях оно принимает намного бóльшие значения.

6. Схема серийно изменяющейся вероятности и ее применение в статистике

При значительном числе наблюдений для рассмотренных исследований характерно значительное расхождение между теоретически ожидаемыми и фактическими результатами. Но когда Лексис (1879) обратился к статистическим рядам, состоящим из умеренного числа наблюдений, он заметил в общем намного лучшее приближение к нормальной дисперсии, при котором числовые значения отношения ошибок (h_1/h_2) или (μ_2/μ_1) (коротко: значение *Fehlerrelation*, которое можно обозначить через Q') как правило несущественно отклоняются от единицы. Для пояснения этого на первый взгляд необычного результата Лексис предложил схему серийно изменяющейся вероятности, так что каждое отдельное значение p_i' соответствовало абстрактной вероятности p_i, и в пределах каждой из σ серий наблюдений, составлявших ряд, отдельные наблюдения были полностью независимы. Теперь следовало показать, что в этом случае ожидаемое значение Q' оказывалось равным уже не единице[17], а величине

$$Q = \sqrt{1+(s-1)\frac{\sum(p_i-\bar{p})^2}{\sigma\bar{p}(1-\bar{p})}}\,.$$

Если учесть, что дробь, на которую умножается (s – 1), не зависит от числа наблюдений s, то станет ясно, что следует ожидать, что чем малочисленнее отдельные наблюдения, на которых основано каждое значение p_i', тем к меньшему ожидаемому значению Q' приведет соответствующий эмпирический ряд (1). Но чтобы величина Q и ее приближенное значение Q' оказались близки к единице, должно тем не менее быть выполнено еще одно условие, а именно, чтобы указанная абстрактная вероятность испытывала небольшие колебания[18]. Оно могло бы как правило иметь место для большинства явлений статистики населения и моральной, да и само по себе выполнение этого условия весьма вероятно. Таким образом, приняв предпосылку серийно изменяющейся вероятности, можно объяснить своеобразное поведение величины Q', эмпирические значения которой при сравнительно малом числе наблюдений колеблются около единицы, в противном же случае оказываются при описании того же явления существенно бóльшими[19].

И таким образом при колебании статистических отношений во времени можно достичь определенного соответствия теории и опыта не только при описании соотношения мужских и женских рождений, но, как представляется, и согласования, хотя и несколько иного рода, в достаточно общем числе случаев. Подобным соответствием можно, по Лексису, действительно обосновать представление о статистических относительных числах как о приближенных значениях математических вероятностей, и ввести в статистику понятия *система шансов*, *случайные причины*[20] и подобные им. Таким образом будет достигнут более правильный взгляд на суть статистических закономерностей и показана необоснованность тех [неназванных лиц], кто должен был пояснять устойчивость статистических чисел "естественными законами внутренних связей отдельных событий, направленными на установление постоянства" (Лексис 1900, с. 239).

Подлинную задачу теории вероятностей в этой области Лексис усматривал в определении интервалов погрешностей неизвестных (будущих) статистических результатов. Оказалось, однако, по крайней мере для многочисленных наблюдений и появлений изучаемого события (т. е. в наибольшем числе случаев), что это средство непригодно, а вся схема серийно изменяющейся вероятностей – непременно призрачна: их изменения нельзя было обосновать сочетанием шансов (законами вероятности).

С логической и теоретико-познавательной стороны теорию дисперсии Лексиса развил фон Крис (1886, гл. 4, § 9; главы 6 и 9). Статистическим исследованиям коэффициента дисперсии для различных относительных чисел мы обязаны Леру (1888), Вестергаарду (1890) и Эджуорту (1885). Последний, также и в многочисленных статьях в *Journal of the Royal Statistical Society* в 1885 – 1899 гг. и в *London, Edinburgh and Dublin Philosophical*

Magazine в 1883 – 1892 гг., хоть и непосредственно следуя Лексису, пришел к иным выводам о границах его изменения и в известной степени способствовал [созданию] собственной теории. Недавно Peek (1899) сумел установить в области статистики смертности почти нормальную дисперсию для нескольких рядов со сравнительно малым числом наблюдений. См. также Kammann (1900a; 1900b).

7. Теоретико-вероятностная обработка средних статистических значений

Числовые значения, которыми занимается статистика, не всегда, как в рассмотренных выше случаях, имеют форму вероятности и часто оказываются ее функциями, однако при соответствующих видоизменениях необходимых формул они не менее поддаются обработке с указанной выше точки зрения[21]. Это относится и к тем средним статистическим отношениям, которые можно подчинить понятию математического ожидания. Уже Лаплас (1812, гл. 8) показал, как можно для подобных величин, в частности относящихся к средним продолжительностям жизни и женитьб, изучать случайные эмпирические уклонения от основополагающих теоретических значений.

Что касается исследования коэффициента дисперсии для подобного рода статистических отношений, то методы, рекомендованные Лапласом лишь для вероятностей, применимы и здесь. По существу мы имеем дело с величинами A, математические ожидания m которых представляются интегралом

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} x\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)dx$ – […], а α и ß – […]. Пусть получено σs отдельных значений a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, \sigma$ и $j = 1, 2, \ldots, s$) A в σ сериях по s элементов в каждой и для каждой серии вычислено среднее

$$m_i = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}.$$

Далее, если s достаточно велико, вероятность уклонению $(m_i - m)$ находиться в интервале $\pm z$ будет равна P_t, где $t = zh$ и h (мера точности m_i) определяется из уравнения

$$\frac{1}{2h^2} = \frac{1}{s}\int_{\alpha}^{\beta}(x - m)\varphi(x)dx.$$

Для h приближенные значения могут быть получены из формул

$$\frac{1}{2h_1^{\,2}} = \frac{1}{s}\frac{\sum_{i=1}^{\sigma}(a_{ij} - \overline{m})^2}{\sigma s - 1},\quad \frac{1}{2h_2^{\,2}} = \frac{\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{s}\ (m_i - \overline{m})^2}{\sigma - 1},\quad \overline{m} = \frac{1}{\sigma}\sum m_i\ .$$

Сопоставление h_1 и h_2 покажет различие между соответствующими дисперсиями и приведет ко всем сопутствующим последствиям (Борткевич 1894 – 1896/1968, с. 104). Теории вероятностей выпадает здесь, однако, еще одна задача, а именно установление $\varphi(x)$. По поводу различных размеров, характеризующих человеческое тело, Кетле (1846, с. 133 и след., с. 400 и след.; 1835; 1869; 1870) доказал, что уклонения их значений, измеренных у различных лиц от средних, достаточно точно подчиняются экспоненциальному закону

$$\varphi(x) = (k/\sqrt{\pi}) \exp [- k^2(x - m)^2],$$

в котором k – постоянная, каждый раз подлежащая определению по собранным данным.

Позже Лексис (1877, гл. 3) применил в своей теории нормального возраста принцип Кетле[22] к явлениям продолжительности жизни. И всё же в некоторых подобных случаях действительное распределение отдельных значений статистической величины около ее среднего значения не соответствует указанной формуле. Следует поэтому либо придать закону ошибок[23] более общую форму, для которой та формула оказалась бы лишь частным видом, либо считать выявленные несоответствия аномалией, которая должна была быть вызвана специальной причиной. В качестве последней учитывается факт или предположение о том, что иногда имеют дело со смешением многих типов людей, или что исследуемый тип вырождается, или что исследуемая величина является функцией другой величины, которая-то и подчиняется нормальному закону, и т. д. Каждая из этих попыток разъяснения дает повод к особым теоретическим соображениям. Самым обстоятельным образом относящиеся сюда вопросы рассмотрел Fechner (1897), см. также Lipps (1898), и Пирсон (1894 – 1896). О его исследованиях см. Эджуорт (1895) и Лексис (1898, с. 396 – 397), который привел дальнейшие ссылки, и, наконец, Blaschke (1899).

Примечания

1. Мы опустили второй раздел статьи (*Специальные проблемы*: таблицы смертности и инвалидности, формальная теория населения, вероятности смерти и коэффициенты смертности). Статья была подана (и быть может полностью подготовлена к печати) в 1901 г. Мы также не воспроизвели многочисленных ссылок автора на две статьи из того же тома *Энциклопедии*: Теория вероятностей (E. Czuber) и Уравнительные вычисления (J. Bauschinger). О. Ш.

2. См. также De Witt (1671). В общей форме эти мысли впервые, видимо, появились у Гравезанда (′sGravesande 1737). См. John (1884, с. 233). Л. Б. Соответствующую выдержку см. в *Очерках* Чупрова (с. 217 в изд. 1959 г.). О. Ш.

3. Эта ссылка явно устарела; мы сохранили ее, чтобы не нарушать исторического фона повествования. Впрочем, автор вполне мог бы сослаться и на немецкий перевод *Искусства предположений* 1899 г. О. Ш.

4. Есть и такие теоретики статистики, например Guerry (1864, с. XXXIII и след.) и Кнапп (1872, с. 116 – 119), которые считают привлечение теории вероятностей для пояснения закономерностей, проявляющихся в статистических результатах, не только излишним, но прямо-таки ошибочным. Л. Б.

5. Этот *вид* (и *удобную форму*, см. чуть выше) Лапласу удалось получить с помощью нестрого доказанных им нескольких вариантов центральной предельной теоремы. Впрочем, уже в 1733 г. Муавр пришел к вполне аналогичной формуле, – частному случаю той же теоремы. На континенте Европы об этом узнали лишь в конце XIX в. (но Борткевич мог бы уже упомянуть Муавра). О. Ш.

6. Пуассон (1837, § 88) обобщил эту теорему, исследовав случай $p_2 - p_1 \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, причем, однако, вместо δ следовало теперь принять $\delta - \varepsilon$ и $\delta > \varepsilon$. Л. Б.

7. Ср., однако, Kiaer (1899). Л. Б.

8. Пуассон (и Курно) отличали шанс и вероятность друг от друга; последний опубликовал адресованное ему письмо Пуассона 1836 г. на этот счет. Впрочем, эта точка зрения устарела и даже Бейес, в самом начале своего классического мемуара 1764 г., прямо заявил, что не различает этих понятий. Формально, конечно, они не совпадают; иметь, например, 3 шанса из пяти означает иметь вероятность 3/5. Допустимо также употреблять оба термина в одной и той же фразе для изящества стиля. О. Ш.

Гаварре (1840) заявил, что только эти исследования Пуассона основали приложение теории вероятностей в медицинской статистике. Напротив, Bienaymé (1839, с. 188) и Курно (1843, § 76) посчитали, что они не дали ничего нового по сравнению со схемой Якоба Бернулли и Лапласа, которую Пуассон назвал случаем “постоянных шансов”. См. наше исследование (1894 – 1896/1968, с. 68 – 79), где в частности подчеркнуто, что Пуассон (1837, с. 149 – 150) особо доказал, что в обоих указанных случаях искомая вероятность простых результатов может быть определена опытным путем аналогичным образом и с той же степенью точности. [Мнение Бьенеме и Курно было ошибочным, см. Heyde & Seneta (1977, p. 43) О. Ш.]

В Преамбуле (с. 7) есть, однако, одно место, где сказано, что относительная устойчивость отношений, появляющихся в качестве приближенных значений некоторой вероятности, в случае переменных шансов зависит от большей или меньшей амплитуды колебаний, которым подвержены случайные причины. Сами наблюдения, поясняет Пуассон, в каждом отдельном случае позволяют выяснить, достаточны ли были они продолжены для достижения требуемого апостериорного приближения искомой вероятности.

Но это место нельзя признать решающим, потому что оно прямо противоречит всему изложению в основном тексте. Кроме того, оно, равно как и подобное на с. 12 той же Преамбулы, дословно взяты из предыдущего мемуара Пуассона (1835, с. 478 – 479 и 481), и вообще вся Преамбула в основном лишь повторяет его. Можно предположить, что в 1835 г. Пуассон еще не установил полного совпадения случаев постоянных и переменных шансов по отношению к интервалу действия случайных причин. [Указанные места в Преамбуле см. в переводе: Шейнин (2006, с. 284 – 285 и 289). О. Ш.]

И кроме того важно, что чуть позже Пуассон (1836, с. 604 – 605) ничего не сказал об амплитуде изменений случайных причин как факторе, который должен быть определен вместе с указанным интервалом. Названные места Преамбулы вполне могли стать причиной того, что Кетле (1846, с. 213) и, видимо, Гаварре (1840, с. 74) пришли к неверному заключению, что в случае переменных шансов будто бы требуется больше наблюдений для установления некоторой вероятности с той же самой степенью точности. Л. Б.

9. См. п. 6 статьи. О. Ш.

10. В этом абзаце мы почти дословно воспроизвели текст самого Курно (1843, § 117). О. Ш.

11. В 1809 г., в *Теории движения* (§ 178), Гаусс назвал эту величину *мерой точности*. Это название и укоренилось, притом в теории ошибок, а не в методе наименьших квадратов, как сказано чуть раньше. О. Ш.

12. По поводу *обычной азартной игры* Борткевич сослался на Чубера (см. Прим. 1), у которого подобного термина не было. О. Ш.

13. См. [II, Прим. 22]. О. Ш.

14. Это неясное утверждение автор перенял у Лексиса (1877, с. 92). О. Ш.

15. Борткевич мог бы добавить, что уклонения в принципе следуют и другим законам, т. е. что связи с теорией вероятностей (см. мнение Лексиса чуть ниже) могли и не утрачиваться. См. также [III, наше Предисловие и Прим. 22]. О. Ш.

16. Впрочем, см. Лексис (1877, § 46). Л. Б.

17. Эта формула выведена в моей статье [I, § 14]. Вывод у Лексиса не вполне строг и вместо $(s - 1)$ он указал s. Л. Б. Ничего подобного у Лексиса мы не нашли. По поводу равенства $EQ' = 1$ см. [I, Комментарий, п. 5]. О. Ш.

18. Очевидно, чтобы упомянутая дробь не могла принимать больших значений. О. Ш.

19. Впрочем, схему серийно изменяющейся вероятности следует воспринимать лишь как более или менее грубое выражение действительного вида системы шансов, на которой основано статистическое явление. О соотношении этой схемы со схемой Бьенеме см. нашу брошюру [I, Прил. 2]. Л. Б. В указанном Приложении Бьенеме не упоминается. См. [I, Комментарий, п. 10]. О. Ш.

20. О шансах см. Прим. 8. Классификацию причин, правда, неудачную, предложил Кетле (Шейнин 1986, с. 315 – 316). О. Ш.

21. Этой мысли придерживался Лексис (1876, Прим. 16) по поводу статистического соотношения мужских и женских рождений и соответствующей вероятности. Л. Б. См. наше Предисловие. О. Ш.

22. Аналогичные исследования о распределении вступающих в брак по возрастам см. Perozzo (1883) и Küttner (1886, с. 37 и след.). Л. Б. Принцип Кетле, как можно понять, состоял в применении экспоненциального закона. Неявно об этом см. Лексис (1877, с. 39). О. Ш.

23. *Закон ошибок* – устаревший термин. В теории ошибок он обозначал нормальный закон, от универсальной применимости которого отказался уже Гаусс, после чего термин потерял смысл. О. Ш.

Библиография

Сокращение: Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik = JNÖS

Четвериков Н. С., ред. (1968), *О теории дисперсии.* М.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1986), Quetelet as a statistician. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 36, pp. 281 – 325.

--- составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также www.sheynin.de

Bienaymé I. J. (1839), Théorème sur la probabilité des résultats moyens des observations. *L'Institut*, t. 7, pp. 187 – 189. Также *Soc. Philomatique de Paris*, sér. 5, pp. 42 – 49.

Blaschke E. (1899), Über die analytische Darstellung von Regelmäßigkeiten bei unverbundenen statistischen Massenerscheinungen. *Mitt. Verbandes öster. u. ungar. Versicherungstechniker*, No. 1, pp. 6 –

Bortkiewicz L. von, Борткевич В. И. (1894 – 1896, нем.), Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики. В книге Четвериков (1968, с. 55 – 137).

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

Czuber E. (1899), Die Enzwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen. *Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 7, No. 2. Отдельная пагинация.

Dormoy É. (1874), Théorie mathématique des assurances sur la vie *J. des actuaires franç.*, t. 3, pp. 283 – 299, 432 – 461.

--- (1878), То же название, tt. 1 – 2. Paris. Включает статью 1874 г.

Edgeworth F. Y. (1885), On the method of statistics. *Jubilee Volume of the Statistical Society of London*, pp. 181 – 217. Перепечатка в книге автора *Writings in Probability, Statistics and Economics*, vol. 2. Cheltenham, 1996, pp. 24 – 60.

--- (1895), On some recent contributions to the theory of statistics. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 58, pp. 506 – 515. Перепечатка там же, с. 95 – 104.

Fechner G. T. (1897), *Kollektivmasslehre.* Leipzig.

Gavarret J. (1840), *Principés généraux de statistique médicale*. Paris.

Graunt J. (1662), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Baltimore, 1939. Естественные и политические наблюдения над бюллетенями о смертности. В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской* *статистики, математики страхового дела*. Берлин, с. 5 – 105. Также www.sheynin.de

'sGravesande G. J. (1737), *Introductio ad philosophicam, metaphysicam et logicam continens*. Venetiis, 1748.

Guerry A. M. (1864), *Statistique morale de l'Angleterre comparée avec la statistique morale de la France*. Paris.

Hendriks F. (1852), Contributions to the history of insurance. *Assurance Mag*., vol. 2, pp. 121 – 150, 222 – 258.

Heyde C. C., Seneta E. (1977), *I. J. Bienaymé*. New York.

John V. (1884), *Geschichte der Statistik.* Stuttgart.

Kammann W. (1900a), *Das Geschlechtsverhältnis der Überlebenden in den Kinderjahren als selbstständige massenphysiologische Konstante.* Göttingen. Диссертация.

--- (1900b), Резюме диссертации. JNÖS, Bd. 19, pp. 382 – 389.

Knapp G. F. (1872), Quetelet als Theoretiker. JNÖS, Bd. 18, pp. 89 – 124.

Kiaer A. N. (1899), Die repräsentative Untersuchungsmethode. *Allg. stat. Archiv*, Bd. 5, pp. 1 – 22.

Kries J. von (1886), *Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Freiburg i/B.

Küttner W. (1886), *Die Eheschließungen in Königreich Sachsen.* Dresden.

Laplace P. S. (1781), Sur les probabilités. *Oeuvr. Compl*., t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485.

--- (1786a), Suite de mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres. *Oeuvr. Compl.*, t. 10. Paris, 1894, pp. 295 – 338.

--- (1786b), Sur les naissances, les mariages et les morts etc. *Oeuvr. Compl.*, t. 11. Paris, 1895, pp. 35 – 46.

--- (1812), *Théorie analytique des probabilités. Oeuvr. Compl.*, t. 7. Paris, 1886.

Lehr J. (1888), Zur Frage der Veränderlichkeit statistischer Reihen. *Vierteljahrsschrift f. Volkswirtschaft, Politik u. Kulturgeschichte*, Bd. 101.

Lexis W. (1875), *Einleitung in Theorie der Bevölkerungsstatistik.* Strassburg.

--- (1876), Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. JNÖS, Bd. 27, pp. 209 – 245. Перепечатано: Lexis (1903, с. 130 – 169).

--- (1877), *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft.* Freiburg i/B.

--- (1879 нем.), О теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968, с. 5 – 38).

--- (1886), Über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf die Statistik. JNÖS, Bd. 13, pp. 433 – 450.

--- (1890 – 1894), Gesetz; Geschlechtsverhältnis der Geborenen und der Gestorbenen; Moralstatistik; Statistik. В книге *Handwörterbuch der Staatswissenschaften.*

--- (1898), Anthropologie und Anthropometrie. *Hdwb der Staatswissenschaften*, Bd. 1, с. 388 – 409.

--- (1900), Gesetz. *Hdwb der Staatswissenschaften*, 2-е изд., Bd. 4, c. 234 – 240. Ср. Lexis (1890 – 1894).
--- (1903), *Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik*. Jena.
Liebermeister C. (ca. 1876), Über Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik. *Sammlung klinischer Vorträge*. Innere Med., No. 39 (No. 110). Leipzig, pp. 935 – 961.
Lipps G. F. (1898), Über Fechner's Kollektivmasslehre und die Verteilungsgesetze der Kollektivgegenstände. *Phil. Studien*, Bd. 13, pp. 579 – 612.
Navier (1835), Статья в *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 1, pp. 247 –
Pearson K. (1894 – 1896), Contributions to the mathematical theory of evolution. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, vol. A185, pp. 71 – 110; vol. A186, pp. 343 – 414; vol. A187, pp. 253 – 318.
Peek J. H. (1899), Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. *Z. f. Versicherungs- Recht u. Wissenschaft*, Bd. 5, pp. 187 – 191.
Perrozo L. (1883), *Neue Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistik*. Dresden.
Petty W. (1683), Another Essay in Political Arithmetic concerning the Growth of the City of London. В книге автора *Econ. Writings*, vols 1 – 2. Cambridge, 1899; vol. 2, pp. 451 – 478.
Poisson S.-D. (1835), Recherches sur la probabilité des jugements etc. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 1, pp. 473 – 494.
--- (1836), Formules rélatives aux probabilités qui dépendent de très-grands nombres. Там же, т. 2, с. 603 – 613.
--- (1837), Название книги совпадает с названием статьи 1835 г. Paris. [Paris 2003.]
Poisson S.-D., Double F. J. и др. (1835), Рецензия на Civiale, Recherches de statistique sur l'affection calculeuse. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 1, pp. 167 – 177.
Quetelet A. (1835), *Sur l'homme*. Paris.
--- (1846), *Lettres sur la théorie des probabilités*. Bruxelles.
--- (1879), *Physique sociale*. Bruxelles.
--- (1870), *Anthropométrie*. Bruxelles.
Westergaard H. (1890), *Die Grundzüge der Theorie der Statistik*. Jena.
De Witt J. (1671, голл.), Value of life annuities in proportion to redeemable annuities. В книге Hendriks (1852, pp. 232 – 249).

IV. Вероятность и статистические исследования по Кейнсу [Keynes (1921)]

Wahrscheinlichkeit und statistische Forschung nach Keynes
Nordisk Statistisk Tidskrift, Bd. 2, 1923, pp. 1 – 23

[1] Каждый думающий статистик, находится ли он в своей деятельности близко или далеко от математики, имеет все основания выяснить для себя вопрос об отношениях между статистическим методом и понятием вероятности и [вообще] теорией вероятностей. Следует к тому же учесть, что эти отношения, как известно, оцениваются весьма различным образом. Одни склоняются к тому, чтобы всю научную статистику считать как бы прикладной теорией вероятностей; другие полагают, что эту теорию рекомендуется привлекать в лучшем случае лишь в специальных вопросах статистических исследований.

Эту проблему, которую будут еще долго обсуждать, Кейнс рассматривает в своей книге со знанием дела, хотя его изложению она целиком не посвящена. Лишь ее последняя, пятая часть о теории статистических выводов непосредственно относится к статистике. В первых четырех частях обсуждаются, соответственно, вероятность; логические основания теории вероятностей; индукция и заключения по аналогии; и "некоторые философские приложения вероятностей". Между этими общими соображениями автора и его частными заключениями о статистическом методе существует, однако, теснейшая связь, так что всё его сочинение вообще является цельным, притом вполне оригинальным и по замыслу, и по исполнению.

И Кейнс никак не утаивает, откуда при необходимости он заимствовал строительный материал для своей системы; он всегда указывает это со скрупулезной добросовестностью. В основном он чувствует себя в родстве со своими английскими предшественниками. Как и те, он старается избежать области творческой фантазии и никогда не терять связи с фактическим материалом. В соответствии с подобным образом мышления Кейнс отвергает восторженность Лапласа[1], которому охотно внимали его современники, остававшиеся длительное время в его плену.

Эллис (1842) был первым, кто возразил этой "алхимии логики". Затем Венн (1866) разработал теорию, полностью основанную на эмпирике, в соответствии с которой вероятность появлялась по существу лишь как статистическая частость некоторого события, и притом лишь если наблюдения продолжались бы до бесконечности. Кейнс, однако, решительно против этой "частотной теории". Именно, "эмпирическая школа" зашла слишком далеко в своей реакции на точку зрения Лапласа. Будь наш опыт и наша наука совершенны, теория вероятностей вообще не была бы нужна[2]. Однако, если в нашем опыте обнаруживаются пробелы, то, как полагает Кейнс, никакие вероятностные суждения не допускаются без помощи *либо* интуиции, *либо* чего-то иного, т. е. без специально предназначенного для этого априорного принципа. Мы покажем, что в своем собственном учении Кейнс привлекает для этой цели и то, и другое.

Что касается, во-первых, принципа, то Кейнс полагает необходимым, несмотря на свое сильное и подчеркнутое отрицание Лапласа, примкнуть в этом отношении к нему. По Лапласу, каждая численно измеримая вероятность, – а он считал, что по существу вероятность таковой вообще и является, – покоится на неполном знании обстоятельств, что приводит к возможности отличать друг от друга два или более взаимоисключающих случая, осуществление которых оказывается в равной мере неопределенным. По соотношению числа таких случаев, "благоприятных" некоторому событию […], к из общему числу, выводится его вероятность.

Сформулированный таким образом принцип определения вероятности назывался по-разному. Буль [(1862/1952, с. 390)] , например, говорит о "равномерном распределении нашего знания, или, скорее, незнания"; фон Крис [1886] придумал название "принцип недостаточного основания". Кейнс, однако, счел это выражение неудовлетворительным и предложил взамен "принцип безразличия". На деле, однако, Кейнс четко согласился с давней критикой этого принципа у фон Криса, однако лишь постольку, поскольку удерживается в силе формула Лапласа. Именно, он полагает, что следует лишь более строго ввести принцип безразличия, который тогда станет пригодной основой, притом единственной, вероятностных рассуждений.

[2] Собственную точку зрения Кейнса можно понять так, что он противопоставляет "простой принцип безразличия" его "квалифицированной" форме. Он [однако] предлагает некоторые оговорки. Важнейшая из них говорит об иррелевантности [неуместности]. Таковой для высказывания x, основанного на результате h_1, является обстоятельство h_2, если вероятность x (точнее, вероятность, что высказывание x подтверждается) не меняется при добавлении h_2 к h_1; или более общо: если нечто может осуществляться из h_2h_1 (т. е. из h_1, к которому добавлено h_2), но не из одного только h_1.[3] Относится к делу, напротив, такое обстоятельство h_2, если оно само или какое-то следствие из h_2h_1 как-то изменит интересующую нас вероятность. Соответственно, следует заметить, что x и y, равно как и h_1 и h_2, Кейнс считает высказываниями или предложениями и потому иногда применяет для h_2 символ $f(x)$, который означает предложение, находящееся в связи с предложением x в форме f. Чтобы обосновать на основе заданного результата равновероятность двух различных высказываний, x и y, этот результат не должен содержать никаких относящихся к x или y обстоятельств, которые не соответствовали бы уместному обстоятельству *той же формы*, относящемуся к x или y. Символически это означает: если $f(x)$ содержится в h_1, то $f(y)$ должно тоже содержаться в нем и обратно.

Это правило, которое можно для краткости назвать *правилом симметрии*, Кейнс поясняет часто обсуждаемым примером урны, содержащей определенное число (скажем, 4) неизвестного количества белых и черных шаров. Спрашивается, и Кейнс рассматривает оба получаемых при этом решения: либо рассматривать как равновероятные все 5 значений, 0, 1/4, 1/2, 3/4, и 1, которые может принять отношение числа черных шаров к их общему числу, либо же считать, что каждый шар может быть в равной степени и черным, и белым и определить таким образом, что эти вероятности равны 1/16, 1/4, 3/8, 1/4, и 1/16. […][4]

Высказывание Кейнса в пользу второго решения основано, однако, на порочном круге. […]

Этот пример, на что указывает Кейнс, рассматривали, в частности, фон Крис и Штумпф[5]. Первый пришел к верному, по моему мнению, выводу о том, что этот случай решительно не допускает никакого численного определения вероятности. […]

Критика Штумпфа побудила фон Криса (1916) вернуться к этой задаче, и он попытался подкрепить свою прежнюю точку зрения новыми соображениями. […]

Подобные размышления только подтверждают то, что, впрочем, было понятно с самого начала: пытаться в данном случае вывести общее и количественно точное решение – напрасный труд. И если Кейнс этим занимается, то можно спросить себя: соответствует ли это принципу опоры на факты, к сторонникам которого он себя причисляет. И кроме того поразительно, что в этом специальном случае он оказался на стороне "субъективиста" Штумпфа, а не "объективиста" фон Криса[6]. Хоть в общем он находится гораздо ближе ко второму, чем к первому. И если он, заметим мимоходом, высказал свое в некоторой степени неудовлетворение обсуждением им же высоко оцененных логических оснований теории вероятностей фон Крисом, то возможно по крайней мере частично потому, что принял во внимание только его книгу (1886), но не серию статей (1888) и не *Логику* (1916). Можно ли удивляться, что Кейнс с самым главным, как он полагает, условием о принципе безразличия не добился большего успеха в том примере, в котором как раз плодотворность этого условия следовало показать. Я так не думаю. Не подсказывает ли здесь символика, которую Кейнс и в других случаях предпочитает, не существующую строгость? Применение обозначений $f(x)$ и $f(y)$ должно показать, что форма соответствующих предложений, одно из которых связано с x, а другое – с y, одна и та же. Но что здесь следует понимать под *формой*?

В только что рассмотренном примере Кейнс полагал формы соответствующих предложений различными, потому что одно что-то утверждало о числе сочетаний из четырех по два, а второе – из четырех по одному. Не говорит ли это о поразительно мелочном истолковании выражения *форма*? И к установленному Кейнсом правилу симметрии не добавляется определенности тем, что он считает возможным, что обстоятельство h_2 лишь представляется уместным или неуместным (с. 111). Применению правила должна содействовать интуиция (с. 53 – 54 и 64). К тому же, результат h_1 всякий раз включает в себя неистощимое множество различных обстоятельств, – и снова при таких затруднениях помочь может только интуиция.

Аналогичная трудность, конечно же, проявляется в каждом индуктивном исследовании причин явлений, но тем не менее практическая неистощимость h_1 остается обстоятельством, которое применение правила симметрии не очень облегчает. Это правило представляется у Кейнса важнейшим, но всё-таки не единственным средством для придания принципу безразличия большей строгости. Привлекаются и другие меры предосторожности, но они не меняют того положения, что при некоторых обстоятельствах на основании этого принципа могут быть получены различающиеся, и всё же до некоторой степени одинаково обоснованные вероятностные суждения. Вообще-то сам Кейнс не утверждает, что можно во *всех* случаях подобной противоречивости, которую критики принципа безразличия выдвинули в качестве контрпримера, подтвердить этот принцип однозначным решением.

Уже поэтому до некоторой степени поражаешься, что он (с. 52) так ревностно старается “реабилитировать” принцип безразличия.

[3] Вместе с тем следует учесть, что в рамках теории Кейнса он занимает далеко не такое же господствующее положение, как у Лапласа. Последний основал само понятие вероятности на представлении “равной нерешительности”, т. е., в терминологии Кейнса, на принципе безразличия, а это теснейшим образом связано с тем, что в общем Лаплас рассматривал каждую вероятность как правильную дробь. Структура равновозможных случаев, числа которых служат числителем и знаменателем подобной дроби, как раз основана на принципе безразличия.

В противоположность этому Кейнс исходит из намного более общего понятия вероятности, и его предметом таким образом является не теория вероятностей как таковая (многочисленные формулы в его книге в основном относятся не к ее области, а к логическому исчислению), и не исключительно ее логическое обоснование, а общая методика вероятностных суждений. Учение о вероятностях в смысле Кейнса (с. 97) занимается логическими причинами, которые побуждают нас верить скорее одному, чем другому. Тем самым имеются в виду (с. 98) все виды доводов, которые от каких-то предпосылок приводят к разумным, но лишенным достоверности заключениям.

Кейнс отличает измеримые и неизмеримые вероятности[7] и относит к кругу своих рассуждений и те, и другие. Он полагает, что мы часто не в состоянии сравнивать степени неизмеримых вероятностей и остроумно обосновывает этот тезис (с. 34 – 40). Если считать, что не каждая вероятность может быть выражена количественно, и если на основании принципа безразличия вероятности некоторых обстоятельств получают неравные численные значения в зависимости от того, что к соответствующей задаче подступают с той или иной стороны, то упускается то странное, что в таких случаях прежде всего присуще. И дело обстоит так, что противоречивые решения основаны на различных предположениях, и значения вероятностей, при которых эти решения имеют место, не могут быть объединены единым, так сказать вышестоящим значением вероятности, потому что здесь требуется, чтобы соответствующие условные вероятности были представлены в числах, а этого как раз и нет.

Подчеркнуто представленное Кейнсом убеждение, что наряду с измеренными вероятностями существуют неизмеримые, и что как раз эти последние обладают большим весом при каждом виде индуктивного исследования, проявляется во всем изложении, – и при развитии собственных мыслей, и при критике чуждых точек зрения. И это убеждение прямо-таки господствует в последней части сочинения, посвященной статистическому методу. Всякий раз, когда статистическая “характеристика”, в форме ли относительного числа, среднего значения или коэффициента корреляции, переносится на ненаблюденные случаи, – в чем и состоит “индуктивная” функция статистики в противоположность ее “описательной” роли, – этот метод приводит к результату, лишенному всякой достоверности и обладающему лишь лучше или хуже обоснованной вероятностью.

[4] Эта вероятность как раз не может быть выражена ни в какой количественной форме и поэтому Кейнс (с. 367) с особой ссылкой на Лапласа называет “математическим шарлатанством”, который за последние сто лет существенно способствовал подрыву основ теоретической статистики, попытки якобы уточнить до того или иного числа десятичных знаков вероятность какого-либо статистического индуктивного вывода при помощи формул теории вероятностей. По этому поводу он (с. 369) цитирует Лейбница[8]:

Оценка вероятностей исключительно полезна, хотя в примерах из юриспруденции и политических наук тонкие вычисления не так необходимы, как точное перечисление всех обстоятельств.

Можно в большой степени согласиться с Кейнсом в том, что нередко количественное применение определенных формул теории вероятностей в статистике приводило к серьезным злоупотреблениям, но следует всё же спросить, не слишком ли далеко зашло в приведенной выдержке умаление вычислений вообще, и не перегнул ли Кейнс палку, согласившись в этом случае с Лейбницем. Слова Лейбница взяты из его приписки 3.12.1703 к письму 26.11.1703 Якобу Бернулли и были ответом на письмо последнего. В нем Бернулли в частности разъяснил на примере метод опытного определения вероятности. […][9]

Разве эти доводы Бернулли не были решающими? Он наверняка был вообще склонен усовершенствовать теорию вероятностей, о чем свидетельствует следующий его тезис [1685/1969, с. 269 – 270]:

Quanto caeteris scientiis praestet [речь идет о математике] *vel ex eo constat, quod cum reliquae de rebus, in se certissimis ac constantissimis, non nisi probabiliter, illa de rebus maxime fortuitis et casualibus, v. gr. sortitionibus, apodictice et certissimo ratiocinio discurrit*.

Если даже не учитывать подобные крайности и оставаться в рамках диспута Бернулли с Лейбницем, нельзя по моему мнению не считать правым Бернулли, Лейбниц же выглядит в нем неважно. Он снова здесь выказал малое понимание теории вероятностей, что редкостно противоречит его пристрастию к комбинаторике (это заметил уже Кутюра[10] и др.), когда посчитал равновероятными выпадения 11 и 12 очков при броске двух костей! Тем более он не справлялся с более трудными задачами, как, например, с вычислением теперешней стоимости пожизненной ренты (Борткевич 1907, с. 71 – 72 Прим.).

По существу он в своей переписке с Якобом Бернулли неудачно противопоставил “исчисление” и “подсчет обстоятельств”. Если не принимать во внимание азартные игры, то из обстоятельств всё же никак нельзя вывести искомую вероятность. Их наиболее точный учет можно поэтому понимать, лишь если есть намерение из выведенных по наблюдениям значений вероятности перейти к ненаблюденным случаям и при этом заботиться о возможно более полном совпадении общих условий. Но соблюдение этого предписания ничего не изменит в характере производимых вычислений и как правило приведет лишь к тому, что для их обоснования будут производить наблюдения в более тесной области, чтобы иметь дело с меньшими числами.

Быть может в какой-то степени интересно_ что Кейнс (с. 268 Прим) сильно, и быть может слишком сильно, осудил Милля (1843/1914, с. 490) за его рассуждения, посвященные в *Логике* теории вероятностей. Именно, осудил за поразительно напоминающий Лейбница способ учета обуславливающих обстоятельств в противоположность вычислению:

Даже в том случае, когда вероятности обуславливаются наблюдением и опытом, самое небольшое усиление данных (путем лучших наблюдений или более полного исследования специальных обстоятельств случая) имеет больше значения, чем самое детальное исчисление вероятностей, основанных на данных в их прежнем, менее совершенном состоянии. Пренебрежение этим очевидным соображением дало начало тем неудачным приложениям исчисления вероятностей, которые сделали его настоящим позором математики.

Да, конечно, как раз математики неоднократно применяли статистические цифры без того, чтобы точнее проверять их надежность, и кроме того часто необоснованно и слишком схематично обращались со своеобразием объектов исследования. В этом смысле рассуждения Милля весьма достойны внимания, однако они столь же мало относятся к основаниям, структуре и формулам теории вероятностей в их приложении к статистическим материалам, сколь в свое время могли относиться замечания Лейбница в адрес Бернулли.

[5] Сам Кейнс, однако, говорит: “Ответ Лейбница касается существа трудности”. Преисполненный “антивычислительной склонности”, которой он таким образом обладает заодно не только с Лейбницем, но и с Миллем, Кейнс особо порицает оценку точности в статистике, т. е. те вычисления, которые должны служить для установления предположительных или предельных уклонений полученных результатов от действительности.

Чубер (1910, т. 2, с. 15 – 16), например, на основании мужских и женских рождений за определенный период времени вычислил для Австрии вероятнейшее число женских рождений на более поздний период в предположении, что для него известно лишь число мужских рождений. При помощи определенных формул теории вероятностей он установил очень высокую и едва отличную от достоверности вероятность того, что действительное число женских рождений окажется сравнительно весьма близким к вычисленному им. В этом вычислении Кейнс осудил прежде всего перенос отношения мужских и женских рождений, установленного по определенному числу единичных случаев, на *большее* число (ибо в более позднем периоде оказалось больше новорожденных) и то, что тем не менее полагают практически верным полученный результат. Это, мол, противоречит и здравому смыслу, и некоторому теоретически выведенному требованию.

Во-вторых, в этом случае Чубер без достаточного основания полагался на устойчивость отношения полов у новорожденных. Насколько это недопустимо видно уже из того (Кейнс с. 351 – 353), что для еще более позднего периода тот же самый метод приводит к предельным [?] значениям, которые не совпадают с действительностью.

Из этих двух возражений следует рассмотреть только второе как намного более важное; обращение к здравому смыслу в первом из них неубедительно, а по поводу ссылки на теорию полемика завела бы меня слишком далеко. По существу вычисление Чубера связано с тем предположением, что соотношение полов обнаруживает нормальную дисперсию, т. е. вообще наивысшую возможную степень устойчивости. Поэтому его результаты в известной степени обычны, и сам Чубер дает это знать, когда предварительно (с. 13) отсылает к "общепринятому прежде представлению о постоянстве статистических относительных чисел", а в конце того же параграфа (с. 16) упоминает последующие подправляющие высказывания. Кейнс в этом случае не учел контекста.

И хотя сам Чубер не был затронут критикой Кейнса, в своей существенной части она полностью сохраняет силу по отношению к несметному числу аналогичных вычислений, коль скоро им придают непосредственное практическое значение. Впрочем, Кейнс не сказал здесь ничего нового. Уже Венн рассуждал о том, что при переносе статистических частостей от наблюденных случаев к ненаблюденным, и особенно на будущие случаи, предположение о постоянстве или лишь незначительном изменении общих условий является решающим, и в этом состоит причина неуверенности, которая, как он выражается, принадлежит области индукции, а не вероятности. Это должно означать, что было бы напрасно как-то математически, по правилам теории вероятностей, подступать к неуверенности, вызванной предположением об устойчивости, см. Милль (1843, гл. 1 и 6). В какой-то степени поразительно, что Кейнс, который обстоятельно обсуждает Венна и полагает его в определенной степени предшественником Лексиса (об этом см. ниже), ни одним словом не упоминает эти его важные соображения.

Кстати сказать, мне кажется, что Кейнс вообще представляет воззрения Венна в несколько огрубленной форме. Именно, он по существу не обращает внимания на весьма важную для точки зрения Венна мысленную замену действительных рядов наблюдения идеальными. Таким образом "частотная теория" утрачивает свою чрезмерно эмпирическую сторону, хотя, естественно, без установления для нее достоверного основания. И я, чтобы не считаться сторонником указанной теории, это и хотел заметить.

Она, по-моему, страдает как раз тем, что пытается свести понятие вероятности к двум представлениям, – к иррегулярному [беспорядочному] следованию элементов ряда и к приближению соответствующей эмпирической частости к определенному граничному значению, которое может быть точнее указано лишь с помощью теории вероятностей. (Ни Кейнс, ни Bosanquet, давний противник частотной теории, эти ее слабости не отметили.) По отношению к ней, чьим главным представителем можно считать Венна[11], я таким образом полностью согласен с Кейнсом, если не вполне по причинам, то всё же по выводу, т. е. согласен с ее отрицанием. Тем не менее, критика Кейнса в адрес Венна производит на меня впечатление того, что один воспитанник Кембриджа не вполне справедлив по отношению к другому. В воспроизведении Кейнса Венн вряд ли выглядит "примечательно проницательным" (Эджуорт 1911, с. 403/1996, т. 1, с. 152).

[6] Высказанная Венном мысль, что каждому переносу статистической частости от наблюденных случаев к ненаблюденным присуща некоторая неопределенность, не поддающаяся никакому исчислению, подтвердилась впоследствии исследованиями Лексиса реального поведения рядов статистики населения и моральной и нашла в теории, выведенной им для пояснения своих результатов, ее точную формулировку.

В соответствии с этой теорией, указанный вид неопределенности обусловлен тем, что за редкими исключениями вместе с нормально-случайной или несущественной составляющей колебаний в игру вступает их физическая или существенная компонента. Из этих двух составляющих лишь первая, но не вторая допускает по Лексису теоретико-вероятностное толкование[12].

Отсюда сразу же следует, что оценки точности в статистике, поскольку они неизбежно учитывают только несущественную компоненту, и упускают из вида существенную, являются поэтому призрачными. Уже Венн заявил, что "входящие в область индукции причины неуверенности" тем более значимы, чем длиннее ряд неизвестных случаев, для которых постулируется определенная частость. Это должно бы означать, что оценки точности в статистике становятся тем ненадежнее, чем больше возрастает число соответствующих наблюдений[13]. К этому же выводу приходишь на основании теории Лексиса, в соответствии с которой при возрастании этого числа существенная составляющая всё сильнее возмущает колебания.

Однако, если по Венну это влияние вызвано тем, что возрастанию числа наблюдений соответствует удлинение периода наблюдений, то Лексис объясняет это явление более общо: поле наблюдений может быть расширено более длительным периодом наблюдений, или более обширной областью, или бóльшим числом групп [?], притом любая из этих возможностей приводит к более сильному действию существенной составляющей колебаний. Можно поэтому сказать, что в общем оценка точности годится тем меньше, чем многочисленнее наблюдения, на которых она основана. Я сошлюсь тут еще на рассуждения фон Криса (1886, с. 178 – 181) и Карла Вагнера (1898). Кейнс не внес последнее сочинение в свою Библиографию, но статью того же автора, специалиста по страхованию жизни, ошибочно приписал Адольфу Вагнеру.

У Кейнса отсутствует всякое указание на то, что значение оценки точности в статистике, как раз в том смысле, который следует из теории дисперсии Лексиса, зависит от того, имеют ли дело с бóльшим или меньшим числом наблюдений. Привлеки Кейнс эту теорию для суждения о пригодности оценки точности, он во всяком случае занял бы более примирительную позицию и возможно признал бы также, что в борьбе против этой оценки Лейбниц в качестве союзника не оправдывает надежды.

И на самом деле: как указано выше, постулат Лейбница приводит к возможно более точному учету "обстоятельств", чтобы работать со сравнительно меньшим числом наблюдений. Но чем меньше это число, тем более допустима и даже показана оценка точности и тем сильнее побуждение применять формулы теории вероятностей! И не случайно, например, что такой мастер подробных исследований как Вестергаард находится среди тех статистиков, которые выступают за оценку точности и часто применяют ее.

[7] Но если Кейнс, как я полагаю, неверно в этом случае отказывается присоединиться к Лексису, то наверняка не ввиду своих возражений против лексисова направления. Он скорее всерьез интересуется им, подчеркивает его влияние на свои собственные мысли и полагает его, несмотря на некоторые существенные оговорки, плодотворнее по отношению к понятию вероятности и лучше подходящим к принципам верной индукции, чем направление Пирсона. Вполне благоприятно Кейнс судит, в частности, о некоторых моих статьях о теории дисперсии, появившихся четверть века назад или еще раньше. По отношению к моему *закону малых чисел* (1898), он, конечно же, полагает, что я вряд ли доказал что-либо, кроме неприменимости критерия Лексиса к случаю редких событий.

Этот взгляд, который в свое время высказал и Блашке (1898), был бы верен при условии, что малость числа появлений события по чисто арифметическому, не имеющему ничего общего с теоретико-вероятностным, основанию, приводит к невозможности существенного превышения 1 коэффициентом дисперсии. Но это не так. Скорее должны добавиться определенные и формулируемые лишь на языке теории вероятностей условия, чтобы этот коэффициент оставался в окрестности 1. Один, и только один пример может это прояснить.

Он касается разрыва паровых котлов. Прусская статистика (*Jahrbuch* 1910, с. 136) ежегодно указывает в двух различных рубриках разорванные котлы и число убитых при этом. За 1890 – 1909 гг. в среднем за год оказалось 3.3 разрыва котлов и 1.8 убитых. Хотя второе число меньше первого, коэффициент дисперсии для разрыва котлов равен 0.86, а для убитых, напротив, 1.67. Поскольку средняя ошибка коэффициента во втором случае равна 0.16, то не может быть речи о том, что установленное уклонение 0.67 в сторону превышения случайно. Скорее это объясняется "острой солидарностью отдельных случаев". Sapienti sat (для умного достаточно)[14].

Несмотря на неудачную, по-моему, критику закона малых чисел, Кейнс всё же не отрицает полностью своего интереса к нему. Существенно иначе он оценивает мои позднейшие работы из области математической статистики и полагает, что "со временем

Борткевич не становится более вразумительным”. Избыток математических формул в них препятствует читателю понять, чего я, собственно, хочу (с. 403, прим.). Он говорит обо мне: “как и многие другие, занимающиеся теорией вероятностей, он странен и предпочитает алгебру здравому смыслу”.

[8] Кейнс обосновывает этот упрек в нескольких замечаниях к моей статье (1918). Ее тему я взял, по правде говоря, не с неба, и методы, к которым я прибегнул, также не оттуда. В специальной литературе можно найти много высказываний о том, воздействует ли однородность на устойчивость частости и как проявляется при этом бóльшая или меньшая однородность статистической группы. Я решил выяснить этот вопрос по статистическим данным. В качестве критерия степени устойчивости, ввиду ее независимости от ширины соответствующего поля наблюдений, в моем распоряжении находилась существенная составляющая колебаний[15].

Но по поводу второго из этих критериев [?] следует показать, как надо вычислять его, потому что Лексис применил не всегда удобный метод определения существенной составляющей. Затем я установил критерий для степени однородности статистической группы и объяснил, что если соответствующую величину нельзя оценить количественно, можно всё же быть уверенным, что в соответствии с этим критерием полная группа никогда не покажет более высокую степень однородности, чем среднее из частичных групп, из которых она состоит. И, соответственно, население Германии, к примеру, безразлично в каком смысле, менее однородно, чем среднее из населения отдельных ее областей. Таким образом была подготовлена почва для исследования соотношения однородности и устойчивости. На ряде примеров удалось показать, что коэффициент дисперсии для полной группы, хоть и оказался более высоким, чем для среднего из частичных групп, но не в такой степени, какую можно было бы ожидать ввиду большего числа отдельных случаев в ней по сравнению с частичными группами.

Иначе говоря, оказалось, что существенная составляющая колебаний для полной группы ниже, чем для среднего из частичных групп. Ввиду сказанного ранее это означает ни что иное, как сочетание меньшей однородности с более высокой устойчивостью и обратно. Это следовало разъяснить, и мне удалось установить математическую связь между составляющей колебания полной группы с составляющими для частичных групп.

[9] В формулу, выражающую эту связь, входит сомножитель, составленный по образцу коэффициента корреляции и названный коэффициентом синдромии. Он указывает меру соответствия друг другу статистических рядов, состоящих из отдельных частичных групп. При полном соответствии (изодромия) этот коэффициент равен 1; если соответствие более или менее существенно (гомодромия), его значение заключено между 0 и 1; при полном отсутствии связи (парадромия) он равен 0; и, наконец, если процесс, описываемый рядами, протекает “антагонистически” (антидромия), коэффициент синдромии отрицателен.

Чем меньше этот коэффициент, тем больше убывает существенная составляющая колебаний полной группы относительно среднего значения этой компоненты для частичных групп, которому она равна при изодромии. И таким образом причина установленных взаимных отношений между однородностью и устойчивостью состоит в том, что изодромия никогда в действительности не происходит и неизменно имеют место другие формы синдромии.

Если это объяснение верно, сказал я себе, то устойчивость полной группы должна быть существенно выше, чем у частичных групп в том случае, когда она состоит из совершенно несовместимых частей, потому что здесь скорее всего может иметь место парадромия или даже антидромия. И это действительно так и оказалось для статистики женитьб в 1899 – 1908 гг. в шести городах, – в Барселоне, Бирмингеме, Бостоне, Лейпциге, Мельбурне и Риме взятых совместно.

Существенная составляющая колебаний была настолько малой по сравнению с данными по этим же городам, взятыми по отдельности, что коэффициент дисперсии для искусственно составленной полной группы оказался ниже, чем у среднего из указанных частей, тогда как в соответствии со схемой Лексиса серийно изменяющихся вероятностей он должен был быть значительно выше, чем для этого среднего. Именно, Лексис вывел соотношение между значением коэффициента дисперсии и числом отдельных случаев (испытаний) для (практически едва ли встречающейся) изодромии[16]. Я поэтому полагаю, что мое исследование является вкладом в теорию устойчивости статистических рядов, и, несмотря на замечания Кейнса, именно в направлении более точного понимания действительности.

[10] В конце своей статьи я указал, что утверждение об антагонистическом соотношении между однородностью и устойчивостью на самом деле уже издавна применялось в практике страхового дела. Именно, для спокойного существования страхового учреждения естественно нужна устойчивость чисел, в которых отражается его деятельность, и было известно, что этому способствует наибольшее возможное расчленение страхования по территориальным и иным условиям, а не его сосредоточение в небольшом районе при малом виде обеспечиваемых рисков.

Кейнс полагает, однако, что этот довод является лишь примером ранее мной же сделанного различия между общей вероятностью p и составляющими ее отдельными вероятностями p_1, … Вот его слова (с. 403/1973, с. 442):

Если мы основываемся на p и не знаем p_1, p_2, …, то наши вычисления скорее подтвердятся, если случаи выбираются так, что они распределяются по всем группам 1, 2, …, чем если они сосредоточены в первой группе. Другими словами, страховщик не любит, чтобы слишком большая доля его клиентов выбиралась из группы, которая, возможно, подвержена <u>неучтенному им общему влиянию</u>. Если априорные вычисления основаны на среднем по области, не являющейся во всех ее частях однородной, бóльшая *устойчивость результатов будет обеспечена, если все клиенты распределены по всем частям этой неоднородной общей области, чем то по одной, то по другой однородной малой области. Это совсем не странно, но я полагаю, хотя и колеблясь, что в этом и есть по существу всё, чего достиг Борткевич своим тщательно обоснованным математическим выводом.*

Итак, положим, что, например, в случае огневого страхования мы имеем дело с двумя типами зданий, жилыми домами и фабриками, с различными степенями пожарного риска, что, однако, не было принято во внимание при страховании. Размер страхового взноса скорее зависел бы от того, что эти риски находились в определенном соотношении друг к другу. Тогда, по Кейнсу, большей устойчивостью результатов страховых операций способствовало бы страхование и жилых домов, и фабрик на весь рассматриваемый период, а не страхование только одних из них на один год, а затем – только других на следующий год.

Это действительно так (и совсем не необычно), но никак не относится к моему утверждению об антагонистическом поведении однородности и устойчивости. Для связи с моим тезисом следует скорее противопоставить такие два случая. В одном из них страхуются на ряд лет оба типа зданий и притом в определенном соотношении друг с другом (которое от одного года к другому претерпевает лишь нормально-случайные колебания). И если риски пожара для обоих типов не слишком значительно отличаются друг от друга, то установление для них шкалы страховых взносов мало что изменит. (Подобная практика увеличивает устойчивость страховой деятельности.)

В другом случае страхуются на ряд лет либо только жилые дома, либо исключительно фабрики, и притом так, что страховые взносы назначаются в соответствии с рисками пожаров. Мое утверждение теперь свелось бы к тому выводу, что в первом случае, в котором однородность ниже, обеспечивается более высокая устойчивость, чем если бы имелись основания полагать, что для обоих типов зданий риск изменяется от года к году, но так, что друг относительно друга эти изменения (нормально-случайные колебания здесь, разумеется, не учитываются!) по крайней мере частично уравновешивались бы.

Действительно, ничто кроме подобного уравновешивания не имеет места при гомодромии, парадромии или антидромии. Кроме того, в рассмотренном примере более высокая устойчивость в первом случае никак не связана с тем условием, что средние по всему периоду страховые риски для жилых домов и фабрик различны. Даже если такого различия нет, и оба типа зданий по отношению к годичным колебаниям рисков (исключая нормально-случайные) не вполне соответствуют друг другу, более высокая устойчивость появится в первом случае. То же самое было в моих примерах 1918 г.: различие средних вероятностей в отдельных частичных группах оказалось фактором, который хоть и должен приниматься во внимание при вычислениях, но не касается сути проблемы.

[11] Как же могло произойти, что Кейнс всю мою статью, а не только какое-то ее место, в такой степени неверно понял? Насколько я понимаю, единственное объяснение, которое обладает более высокой (хоть и не измеримой!) вероятностью, состоит в том, что литературный материал, использованный им при подготовке книги, был чрезмерно обширен. Одно лишь число просмотренных источников исключает возможность соразмерного скрупулезного изучения каждого из них. И дело идет притом о работе, которая рассматривает до некоторой степени запутанные связи и с которой поэтому не так легко справиться, как с большинством других.

Подобные частности вряд ли имеют значение при существенных достоинствах, которые выделяют сочинение Кейнса именно как критическое сообщение о заслугах других авторов. Иногда он притом ссылается на немецких авторов для потехи, как в случае Бобека (Bobek 1891), который (Кейнс, с. 383) в своем едва известном за рубежом учебнике вычислил вероятность неизменных восходов Солнца в последующие 4000 лет, придав ей лишь низкое значение 2/3.

В основном же Кейнс, справедливо признавая заслуги немецкого духа и немецкого усердия при достижении успехов в философской, математической и прикладной теории вероятностей, обильно цитирует их. Он извлек из небытия и хвалит даже давно забытые книги, как, например, сочинение преподавателя государственного и церковного права Kahle (1735).
Начитанность Кейнса в широко разветвленной вероятностной области поразительна; в этом отношении он соперничает с Чупровым (которого он, кстати сказать, характеризует как промежуточное звено между “немецкой” и “английской” школами и повторно упоминает с похвалой, хоть с основным его трудом (1909)**[17]** и не знаком, поскольку тот вышел лишь на русском языке).

И если учесть, что Кейнс по своему основному положению – профессор национальной экономики, а к тому же всемирно известный публицист и политик, то подобной всесторонности высокой марки нельзя отказать в восхитительном признании.

Примечания

1. Лаплас действительно восторженно описывал свои гуманные политические взгляды, частично основанные на общих вероятностных представлениях и уравновешивающем, мы бы сказали, действием случайности в массовых случайных явлениях. Мы не знаем, что именно имел в виду Борткевич, но во всяком случае он (как и многие другие комментаторы) здесь и ниже как-то принизил Лапласа, чья исходная позиция будто бы сводилась к введению (после Муавра и даже, фактически, Якоба Бернулли) “классического” определения вероятности. Но, во-первых, до введения аксиоматики оно, хоть и высмеивалось, оставалось в силе, обретя соперника лишь в частотном определении Мизеса.

Во-вторых, Лаплас никак не ограничился своим определением и неоднократно подчеркивал, что гипотезы (видимо, и относительно *чисел случаев*) должны непрестанно исправляться новыми наблюдениями, см., например, его *Опыт* (1814/1999, с. 861, левый столбец). Это, конечно же, плохо соотносится с его же утверждением о том, что вероятность покоится на неполном знании. Наконец, Лаплас рассматривал, например, геометрическую вероятность (1812, гл. 5) и решал задачи, используя бейесовский подход (там же, гл. 6). О. Ш.

2. Гораздо правильнее полагать, что без теории вероятностей невозможно изучать массовые случайные явления. О. Ш.

3. Это пояснение не соответствует введенному определению. О. Ш.

4. Здесь и ниже мы опустили подробное рассмотрение предложенной задачи. Сам Борткевич ниже указывает, что ее количественное решение невозможно. О. Ш.

5. Кейнс приводит одну ссылку на фон Криса и три – на статьи Штумпфа, см. нашу Библиографию. В ней, однако, в соответствии с дальнейшими замечаниями Борткевича, добавлены еще две ссылки на фон Криса. О. Ш.

6. Борткевич (1899) критиковал Штумпфа явно и притом публично. О. Ш.

7. Странно, что Борткевич не сослался на Курно (1843, §§ 233, 236), который и ввел неизмеримые (*философские*) вероятности. О. Ш.

8. Мы воспользовались немецким переводом (Gini 1946, с. 405) этой латинской фразы. О. Ш.

9. Борткевич весьма подробно описывает рассуждения Бернулли, хотя уже в 1899 г. *Искусство предположений* появилось в немецком переводе. См. его русский перевод: Бернулли (1986, с. 44 – 45). О. Ш.

10. Кутюра: возможно Couturat (1901). О поразительной ошибке Лейбница, которую Борткевич упоминает чуть ниже, см. Todhunter (1865, с. 48). О. Ш.

11. Чуть выше Борткевич упомянул английского философа Bernard Bosanquet (1848 – 1923). Подлинным основателем частотной теории (которая давно уже лишилась кавычек) справедливо считается Мизес, и вот что он (1972, с. 26 – 27) указывает. Его теория не является “вполне новой”. Венн “обстоятельно изложил” мысль об определении вероятности по частости, но без “непосредственного намерения” создать новую теорию вероятностей. Позднейшими своими предшественниками он счел Фехнера и Брунса в связи с их так называемым учением о коллективе, “близком” к частотной теории, однако “отчетливее всех в этом направлении” проявил себя Helm (1902). И всё же ни указанные авторы, ни многие другие не могли создать “совершенную теорию вероятностей”, потому что не ввели *беспорядочности*, – “решающего” признака коллектива. Заметим, однако, что в Предисловии к изданию 1931 г. той же книги Мизес назвал своими предшественниками Эллиса и Курно.

Чуть выше этот признак упомянул Борткевич, но лишь в качестве слабости частотной теории, и здесь он был прав в том смысле, что математическое определение этого понятия встречает громадные трудности. Вторую слабость (по Борткевичу) этой теории Мизес преодолел весьма просто, определив вероятность как предел частости. О. Ш.

12. Здесь Борткевич не пожелал вспомнить о своем собственном истолковании этой составляющей [I]. Само определение этой составляющей было у Лексиса ее истолкованием. О. Ш.

13. Эту фразу невозможно понять: наблюденные случаи появились вместо наблюденных. И не лучше выглядит утверждение, что из теории Лексиса (от которой к тому времени после исследований Чупрова почти ничего не осталось) будто бы следует, что при увеличении числа наблюдений физическая составляющая колебаний возрастает. У Лексиса нет ни соответствующей формулы, ни подобного качественного замечания; напротив, Лексис (1879/1968, § 15, с. 19) качественно утверждал, что чем больше наблюдений в каждой серии, тем ближе оказывается Q к единице (что почти противоречит закону малых чисел!) и тем меньше эта составляющая, см. его формулу там же, § 11, с. 16. О. Ш.

14. По поводу острой солидарности см. [I, Прил. 2]; этот термин употребил также Чупров (1905/1960, с. 79). Исходных данных для своих вычислений Борткевич не привел, а *средняя* ошибка – это, как можно думать, средняя квадратическая ошибка; именно этот термин он употреблял в 1898 г. и именно ее Лексис (1876, с. 214) и определил, назвав ее, однако, *средней*. См. также [I, Комментарий, пп. 5 и 10]. О. Ш.

15. Это утверждение противоречит указанному им выше, см. Прим. 13. Чуть ниже непонятна фраза о Лексисе, который вообще не вычислял существенной составляющей колебаний. О. Ш.

16. Подобного соотношения мы не нашли. О. Ш.

17. Чупров в свои последние годы вряд ли упоминал этот свой якобы основной труд. С другой стороны, Борткевич быть может сознательно упустил случай подчеркнуть значимость последних работ своего ближайшего коллеги и знакомого в области устойчивости статистических рядов. О. Ш.

Библиография

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926)*. Берлин. Также www.sheynin.de

Ондар Х. О., ред. (1977), *О теории вероятностей и математической статистике. Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова*. М.

Четвериков Н. С., составитель и переводчик (1968), *О теории дисперсии.* М.

--- (1968), Замечания к работе Лексиса [1879]. В книге автора (1968, с. 39 – 54).

Чупров А. А., Tschuprow A. A. (1905, нем.), Задачи теории статистики. В книге автора *Вопросы статистики*. М., 1960, с. 43 – 90.

--- (1909), *Очерки по теории статистики.* Третье изд.: М., 1959.

Bernoulli J., Бернулли Я. (1685), Parallelismus logici et algebraici. *Werke*, Bd. 1. Basel, 1969, pp. 265 – 272.

--- (1986), *О законе больших чисел*. М. Ред. Ю. В. Прохоров.

Blaschke E. (1898), Das Gesetz der kleinen Zahlen. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, 9. Jg, pp. 39 – 41.
Bobek K. J. (1891), *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Stuttgart.
Boole G. (1862), On the theory of probabilities. В книге автора *Studies in Logic and Probability*. London, 1952, pp. 386 – 424.
Bortkiewicz L. von (1899), Eine Entgegnung (gegen Stumpf, betr. die Wahrscheinlichkeitsrechnung). *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 18 (73), pp. 239 – 242.
--- (1907), Wie Leibniz die Diskontierungsformel begründete. *Festgabe für W. Lexis*. Jena, pp. 59 – 96.
--- (1918), Homogeneität und Stabilität in der Statistik. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Bd. 1, pp. 1 – 81.
Cournot O., Курно А. А. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.
Couturat L. (1901), *La logique de Leibniz*. Paris.
Czuber E. (1910), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen*, Bd. 2. Leipzig. Второе изд.
Edgeworth F. Y. (1911), Probability. *Enc. Brit.*, одиннадцатое изд., vol. 22, pp. 376 – 403. Перепечатка в книге автора *Writings in Probability, Statistics and Economics*, vol. 1. Cheltenham, 1996, pp. 125 – 152.
Ellis R. L. (зачитано 1842), On the foundations of the theory of probabilities. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 8, 1849, pp. 1 – 6. Перепечатка в книге автора *Mathematical and Other Writings*. Cambridge, 1863, pp. 1 – 11. Видимо, единственно подходящая по контексту статья.
Gini C. (1946), Gedanken zum Theorem von Bernoulli. *Schweiz. Z. f. Volkswirtschaft u. Statistik*, 82. Jg, pp. 401 – 413.
Helm G. (1902), Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Collektivbegriffe. *Annalen der Naturphilosophie*, Bd. 1, pp. 374 – 381.
Jahrbuch (1910), *Statistisches Jahrbuch f. den Preussischen Staat*.
Kahle L. M. (1735), *Elementa logicae probabilium*. Halle.
Keynes J. M. (1921), *A Treatise on Probability*. Перепечатка в книге автора *Coll. Works*, vol. 8. London, 1973.
Kries J. von (1886), *Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Freiburg i/B. Tübingen, 1927.
--- (1888), Über den Begriff der objektiven Möglichkeit und einige Anwendungen desselben. *Vierteljahrsschrift wissenschaftl. Philos.*, Bd. 12, pp. 179 – 240, 287 – 323, 393 – 428.
--- (1916), *Logik.* Tübingen.
Laplace P. S., Лаплас П. С. (1812), *Théorie analytique des probabilités. Œuvres complètes*, t. 7. Paris, 1886.
--- (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Прохоров Ю. В., ред. (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.
Lexis W., Лексис В. (1876), Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 27, pp. 209 – 245. Также в книге автора *Abh. zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik*. Jena, 1903, pp. 130 – 169.

--- (1879, нем.), О теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков Н. С. (1968), *О теории дисперсии*. М., с. 5 – 38.
Mill J. C., Милл Дж. С. (1843, англ.), *Система логики.* СПб, 1914. Перевод с изд. 1879 г.
Mises R. von, Мизес Р. (1928), *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. Wien, 1972. Русск. перевод: М. – Л., 1930.
Stumpf C. (1899), Bemerkung zur Wahrscheinlichkeitslehre. *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 17 (72), pp. 671 – 672; Bd. 18 (73), p. 243.
--- (1893a), Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. *Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. München*, Philos.-Philolog. und Hist. Kl., Jg. 1892, pp. 37 – 120.
--- (1893b), Über die Anwendung des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffe. Там же, pp. 681 – 691.
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.
Venn J. (1866), *Logic of Chance.* London. Перепечатка последнего изд. 1888 г.: Нью-Йорк, 1962.
Wagner K. (1898), *Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung*. Jena.

V. К арифметике пропорциональных выборов

Zur Arithmetik der Verhältniswahl
Sitz.-Ber. Berliner math. Ges., Bd. 18, 1920, pp. 17 – 24

[1] По арифметическим соображениям основное предложение пропорционального представительства не может осуществляться совсем без исключений. Именно, пусть при *n* партиях на *m* мест подано всего *S* голосов, из которых

$$s_1, s_2, \ldots, s_n \qquad (1)$$

выпало на долю соответствующих партий. Тогда количество мест

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \qquad (2)$$

предоставляемых партиям, будет определяться формулой

$$x_1{:}x_2{:}\ldots{:}x_n = s_1{:}s_2{:}\ldots{:}s_n \text{ или } x_i{:}m = s_i{:}S,$$

но только при условии, что все *n* выражений ms_i/S – целые числа. И именно потому, что это обстоятельство практически никогда не соблюдается, возможно применение различных методов вычисления x_i.

Всего очевиднее [попытаться применить] условие

$$\sum \left| \frac{x_i}{m} - \frac{s_i}{S} \right| = \min. \qquad (3)$$

Здесь и ниже суммирование предполагается от 1 до n. Это условие очевидно равносильно (т. е. приводит к тем же значениям x_i) требованию

$$\sum \mid x_i - \frac{ms_i}{S} \mid = \min. \tag{4}$$

Обозначим

$$S/m = q,\ x_i - s_i/q = d_i, \tag{5, 6}$$

причем q можно считать *естественным коэффициентом выборов*. Тогда (4) принимает форму

$$\sum \mid d_i \mid = \min. \tag{7}$$

Пусть далее

$$s_i/q = t_i + u_i, \tag{8}$$

где t_i должно обозначать наибольшее целое число, содержащееся в s_i/q. Если еще $\sum u_i = l$, то из (8) можно получить

$$m = \sum t_i + l \text{ или } \sum x_i = \sum t_i + l.$$

Отсюда следует, что одно из значений x_i должно быть больше t_i, причем ввиду (7) должны соблюдаться неравенства

$$t_i \le x_i \le t_i + 1.$$

Это следует из такого соображения: Пусть произвольные $(n - l)$ значений x_i равны t_i, а остальные l их значений равны $t_i + 1$. Тогда для первых $d_i = - u_i$, а для вторых $d_i = 1 - u_i$ и, следовательно, $\sum|d_i|$ окажется меньше 1 и, напротив, одно из $|d_i|$ окажется больше 1 при $x_i = t_i - 1$ или $x_i = t_i + 2$. Поэтому убывание $\sum|d_i|$ не достигается ни при убывании на 1 какого-либо x_i, которое было равно t_i, ни при возрастании на 1 какого-либо x_i, которое было равно $t_i + 1$. Таким образом, следует рассматривать только $x_i = t_i$ или $x_i = t_i + 1$. Но тогда задача сводится к определению тех l значений i, при которых должно быть $x_i = t_i + 1$ и [тем самым] тех $(n - l)$ значений, при которых $x_i = t_i$.

Для достижения этой цели рассмотрим разность значений $|d_i|$ при указанных значениях x_i и обозначим ее через e_i, причем эту разность без учета ее знака можно назвать *выгодой*. Из

$$e_i = (s_i/q) - t_i - [t_i + 1 - (s_i/q)] \tag{9}$$

следует ввиду (8)

$$e_i = 2u_i - 1. \tag{10}$$

Теперь ясно, что для выполнения условия (7) не требуется ничего, кроме определения из n выгод e_i тех, которые больше l, или, что с учетом (10) окажется тем же самым, кроме определения из n значений u_i тех, которые больше l, и назначения для этих значений i $x_i = t_i + 1$, а для остальных – $x_i = t_i$. При этом не исключено, что из l "учтенных" выгод некоторые окажутся отрицательными, т. е. что из l соответствующих u_i некоторые будут меньше 1/2.

Если вместо (3) исходить из

$$\sum \left| \frac{x_i}{m} - \frac{s_i}{S} \right|^r, \qquad (11)$$

где r – произвольное положительное[19] или положительное четное число, то значения x_i окажутся теми же самыми, потому что здесь вместо выгод e_i появятся аналогичные выражения $u_i^r - (1 - u_i)^r$, которые тем же самым образом расположатся по величине u_i. Дробь (x_i /m) указывает, какую часть общего числа мест будет предоставлено партии i и может быть названа *указующей дробью*. Таким образом, описанный метод вычисления значений x_i, который многократно использовался практически, можно охарактеризовать как *метод наиболее точных указующих дробей*.

[2] Другим, никем еще не предложенным методом, был бы метод *наиболее точных коэффициентов представительства*. Здесь дело идет о достижении наилучшего возможного совпадения *действительных коэффициентов представительства* x_i /s_i и *естественных коэффициентов представительства* m/S. Если установить, что степень этого совпадения определяется по условию наименьшей по абсолютной величине разности между x_i /s_i и m/S, то должно выполняться требование

$$\sum \left| \frac{x_i}{s_i} - \frac{m}{S} \right| = \min \qquad (12)$$

или, ввиду (6),

$$\sum \left| \frac{d_i}{s_i} \right| = \min. \qquad (13)$$

В том случае, когда число положительных выгод, а потому и число значений i, при которых $u_i \geq 1/2$, равно l, последнее условие приведет к тому же результату, что и (7). Но если это число, которое мы обозначим буквой h, меньше, чем l, то нельзя будет по аналогии с методом наиболее точных указующих дробей сразу же принять $x_i = t_i + 1$ для тех $(l - h)$ значений i среди соответствующих $(n - h)$, среди которых находятся наименьшие $|d_i/s_i|$, или, что то же, $(1 - 2u_i)/s_i$. Следует вначале рассмотреть, нельзя ли будет достигнуть лучшего результата, если для всех этих $(l - h)$ значений i

[19] Видимо всё-таки целое число. О. Ш.

или для некоторых из них принять $x_i = t_i$, но при этом для того значения i, при котором s_i наибольшее, принять $x_i > t_i + 1$.

Пусть s_1 – наибольшее из s_i. Тогда $1/s_i$ будет приращением $|d_i/s_i|$ при возрастании x_1 от $t_1 + 1$ к $t_1 + 2$, от $t_1 + 2$ к $t_1 + 3$ и т. д. и для указанных $(l - h)$ значений i кроме как при $i = 1$

$$\text{если } \frac{1-2u_i}{s_i} > \frac{1}{s_1} \text{ или } u_i < \frac{1}{2} - \frac{s_i}{2s_1}, \text{ то } x_i = t_i, \tag{14, 15}$$

$$\text{если } \frac{1-2u_i}{s_i} < \frac{1}{s_1} \text{ или } u_i > \frac{1}{2} - \frac{s_i}{2s_1}, \text{ то } x_i = t_i + 1. \tag{16, 17}$$

В остальном, однако, вновь без учета случая $i = 1$, при $u_i < 1/2$ следует принять $x_i = t_i$, в противном же случае $x_i = t_i + 1$.

Если таким образом определить $x_2, x_3, \dots, x_n$, то, чтобы вычислить x_1, следует лишь их сумму вычесть из m. И окажется, что $x_1 > t_1 + 1$ либо если $u_1 \geq 1/2$, либо если $(1 - 2u_1)/s_1$ окажется среди тех наименьших $(l - h)$ значений $(1 - 2u_i)/s_i$, про которые речь была выше. Ибо иначе неравенство (14) не может быть выполнено ни для какого i.

Пример А. $S = 1500$, $m = 15$, $n = 14$, $s_1 = 980$, $s_2 = 46$, $s_3 = 45$, $\dots$, $s_{14} = 34$. Здесь по методу наиболее точных коэффициентов представительства (при $l = 6$ и $h = 1$) $x_1 = 15$, $x_2 = x_3 = \dots = x_{14} = 0$, а при методе наиболее точных указующих дробей $x_1 = 10$, $x_2 = x_3 = \dots = x_6 = 1$, $x_7 = x_8 = \dots = x_{14} = 0$.

В противном случае, если $h > l$, нельзя сразу же придавать значения $x_i = t_i$ тем $(h - l)$ значениям i (из соответствующих h), среди которых находятся наименьшие положительные значения e_i/s_i, или, что то же, $(2u_i - 1)/s_i$. Вначале следует проверить, не лучше ли для всех $(h - l)$ значений i или для некоторых из них принять $x_i = t_i + 1$, но при этом потребовать, чтобы $x_1 < t_1$. Здесь снова предположено, что s_1 – наибольшее из s_i. И таким образом мы заключаем относительно случая, когда рассматривается $(h - l)$ значений i, превышающих 1,

$$\text{при } \frac{2u_i - 1}{s_i} > \frac{1}{s_1} \text{ или } u_i > \frac{1}{2} + \frac{s_i}{2s_1}, \ x_i = t_i + 1,$$

$$\text{при } \frac{2u_i - 1}{s_i} < \frac{1}{s_1} \text{ или } u_i > \frac{1}{2} + \frac{s_i}{2s_1}, \ x_i = t_i.$$

И снова следует положить, опять-таки за исключением $i = 1$, $x_i = t_i$ при $u_i \leq 1/2$ и $x_i = t_i + 1$ если $u_i > 1/2$. Здесь также можно определить x_1, вычитая сумму $(x_2 + \dots + x_n)$ из m. При этом x_1 будет меньше, чем $t_1 + 1$ только если $u_1 \leq 1/2$ или если среди наименьших $(h - l)$ значений $(2u_i - 1)/s_i$ окажется $(2u_1 - 1)/s_1$, так как иначе неравенство $(2u_i - 1)/s_i > 1/s_1$ не может быть выполнено ни при каком i.

Пример В. $S = 1500$, $m = 15$, $n = 11$, $s_1 = 925$, $s_2 = 62$, $s_3 = 61$, $\dots$, $s_{11} = 53$. По методу наиболее точных коэффициентов представительства (при $l = 6$ и $h = 10$) окажется, что $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 =$

$\ldots = x_{10} = x_{11} = 1$, тогда как при методе наиболее точных указующих дробей $x_1 = 9$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_7 = 1$, $x_8 = x_9 = x_{10} = x_{11} = 0$.

Условие (13) не равносильно ни требованию

$$\sum |\frac{d_i}{s_i}|^r = \min, \tag{18}$$

где r – произвольное положительное число[20], ни

$$\sum (\frac{d_i}{s_i})^r = \min, \tag{19}$$

где r – произвольное четное число. Это происходит в первую очередь потому, что в (18) r придается значение, не равное 1; если же придерживаться (19), то создается новое условие для метода наиболее точных коэффициентов представительства. А если в условии (13) придать уклонениям $|d_i/s_i|$ веса, пропорциональные s_i, то мы вернемся обратно к методу наиболее точных указующих дробей.

При каждом из обоих рассмотренных методов может случиться, что он не приводит к однозначному решению. И тогда не исключено, что в методе наиболее точных указующих дробей некоторые величины u_i совпадают, а в методе наиболее точных коэффициентов представительства, в его первоначальной или простейшей форме, либо совпадают $(1 - 2u_i)/s_i$ или $(2u_i - 1)/s_i$, либо хотя бы одна из этих величин равна $1/s_i$. Подобные случаи должны быть рассмотрены при дополнительных установлениях, например, решением определять, какая партия или какие партии получит место (получат места), по результатам жеребьевки.

[3] Третий метод, который можно назвать *методом редуцированных частных*, восходит к бельгийскому юристу V. d'Hondt и, в частности, был намечен 30.11.1918 для применения на выборах в немецкое учредительное национальное собрание. Он состоит в следующем. Все числа s_i делятся по очереди на 1, 2, 3, …, m и полученные при этом *частные Хондта*, число которых равно mn, располагаются по их величинам. Пусть q_1 – наибольшее из них, далее q_2, … и q_k – k-е частное. Для определения x_i служит либо указанный самим автором метод, либо, например, метод, предписанный 30.11.1918. По первому из них s_i делятся на q_m, а возможными остатками пренебрегают. Во втором методе устанавливается, сколько из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_m$ достается партии i.

Оба эти метода необходимо приводят к одному и тому же результату, потому что из

$$x_i \le s_i/q_m < x_i + 1 \tag{20}$$

следует

$$s_i/x_i \ge q_m > s_i/(x_i + 1), \tag{21}$$

[20] См. Прим. 1. Условие (19), см. ниже, не существенно. О. Ш.

а число соответствующих частных, достающихся партии i, если оно не равно нулю, очевидно совпадает с делителем наименьшего из них. Случай $x_i = 0$ происходит в первом методе, если q_m ни разу не содержится в s_i, а во втором методе – если $s_i < q_m$, что одно и то же. Сложив $x_i \leq s_i/q_m$ по i, мы получим $m \leq S/q_m$, или, ввиду (5), $q_m \leq q$. Поэтому $q_m = q$, если ни одно из чисел s_i не делится на q_m без остатка. В этом особом случае можно строго применить принцип представительства и вопрос о методе оказывается беспредметным. Иначе же $q_m < q$, что и оправдывает обозначение, данное выше.

Указанным методом Хондта задача может быть сформулирована чисто арифметически следующим образом: даны n целых положительных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и целое положительное число m; требуется определить n целых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и величину y в соответствии с условиями

$$x_i \leq s_i/y < x_i + 1, \sum x_i = m. \qquad (22, 23)$$

Вычисление коэффициентов Хондта и выделение из них m наибольших представляется способом для установления неизвестных y и $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем не требуется соблюдать равенства $y = q_m$. Подойдет каждое значение y, удовлетворяющее условию

$$q_m \geq y > q_{m+1}, \qquad (24)$$

так что задача относительно этого неизвестного допускает бесконечное множество решений. Особый случай представляет условие

$$q_{m-f+1} = q_{m-f+2} = \ldots = q_m = q_{m+1} = \ldots = q_{m+g}, \qquad (25)$$

где f и g – целые положительные числа, $1 \leq f \leq m$ и $1 \leq g \leq n - f$, при котором задача не решается. Если исключить его, то решение относительно x_i всегда единственно. Если принять

$$x'_i \leq s_i/y' < x'_i + 1, \sum x'_i = m \qquad (26, 27)$$

и если в общем $x'_i = x_i$ не подходит, то окажется, что при каком-то i $x'_i > x_i$. Но это предполагает, что $y' < y$, а тогда ни при каком k не будет $x'_k < x_k$ и (27) исключается.

Можно указать более короткий метод вычисления неизвестных x_i. В методе Хондта для каждой пары i, k очевидно имеет место основополагающее условие

$$s_i/x_i > s_k/(x_i + 1) \text{ и потому } s_i(x_k + 1) > s_k x_i. \qquad (28, 29)$$

Если просуммировать (29) вначале по i при фиксированном k, затем по k при фиксированном i, то

$$x_k > \frac{(m+1)s_k}{S} - 1 \text{ или } x_i > \frac{(m+1)s_i}{S} - 1\text{, а также } x_i < \frac{(m+n-1)s_i}{S}.$$

Вводя величины v, w, a_i и b_i по условиям

$$\frac{S}{m+1} = v,\ \frac{S}{m+n-1} = w, \qquad (30a, 30b)$$

$$a_i \leq \frac{s_i}{v} \leq a_i + 1,\ b_i \leq \frac{s_i}{w} \leq b_i + 1, \qquad (31a, 31b)$$

получим

$$a_i \leq x_i \leq b_i,\ \sum b_i - \sum a_i \leq 2(n-2),\ m - \sum a_i \leq n-2. \qquad (32, 33, 34)$$

После вычисления a_i и b_i и установления неравенств

$$\sum a_i < m < \sum b_i,$$

мы тем самым определим те значения i, для которых $b_i \neq a_i$ и для которых, соответственно, можно положить $x_i = a_i$. Далее следует образовать состязающиеся друг с другом частные $s_i/(a_i + 1)$, $s_i/(a_i + 2)$, …, s_i/b_i, число которых не превысит $2(n-2)$, и выделить из них наибольшие $(n-2)$. И если среди выделенных частное z_i соответствует некоторому выделенному i, то следует принять $x_i = a_i + z_i$. Задача таким образом решена.

Суммирование неравенств (31a) приводит к $\sum a_i \leq m + 1$, причем результат $\sum a_i = m + 1$ заранее установит, что все частные s_i/v являются целыми числами, т. е. что для каждого i $s_i/a_i = S/(m + 1)$. Это совпадает с одним из равенств (25), а именно с тем, для которого $f = n - 1$ и $g = 1$. В подобных случаях следует решать жеребьевкой или каким-либо иным способом, какие f из $(f + g)$ партий получат по одному месту.

Описанный метод, приметой которого является предварительное определение граничных значений a_i и b_i, можно упростить с риском расширить интервал между ними, округляя v и w, установив их с избытком и недостатком соответственно, что позволит производить деление s_i/v и s_i/w при помощи вычислительных таблиц Крелле. Другое облегчение вычислений может быть иногда достигнуто, если среди n партий находятся p таких, для которых $s_i < w$, так что $x_i = 0$. Для остальных $(n - p)$ партий при вычислении b_i можно будет вместо (30b) применить формулу $w = S/(m + n - p - 1)$, т. е. как бы уменьшить число партий до $(n - p)$.

Математически нельзя установить, какой из трех методов предпочтительнее, и нынешнее преобладающее мнение, что метод редуцированных коэффициентов лучше подходит основному предложению пропорционального представительства нежели метод наиболее точных указующих дробей и даже является единственным, последовательно применяющим это предложение, не обосновано. Но можно с полным правом указать, что первый более благоприятен более многочисленной партии, чем второй. Это следует из того, что когда две партии, i и k, оспаривают дополнительное сверх t_i место, решающим во втором методе оказывается сравнительная величина u_i и u_k. Результат $x_i = t_i + 1$ здесь связан с условием $u_i > u_k$. В методе редуцированных коэффициентов, напротив, главным является условие

$$\frac{s_i}{t_i+1} > \frac{s_k}{t_k+1},$$

которое ввиду (8) может быть приведено к виду

$$u_i > u_k - \frac{s_i - s_k}{s_k}(1 - u_k). \tag{35}$$

Ясно, что при $s_i > s_k$ последнее неравенство выполняется скорее, чем $u_i > u_k$. В Примере А по методу редуцированных коэффициентов оказывается, что $x_1 = 15$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{14} = 0$, а в Примере В $x_1 = 14$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{11} = 0$.

[4] Дополнение. Сейчас я выяснил из статьи Polya (1918), что в 1910 г. Sainte-Laguё предложил новый метод, при котором числа s_i делятся на 1, 3, 5, …, $(2m - 1)$ и из полученных при этом частных выделяются m наибольших[21]. Соответственно, каждой партии предоставляется столько мест, сколько указывается этими выделенными частными. Sainte-Laguё исходил из условия

$$\sum s_i\left(\frac{x_i}{s_i} - \frac{m}{S}\right)^2 = \sum \frac{x_i^2}{s_i} - \frac{m^2}{S} = \min, \tag{36}$$

равносильного $\sum \frac{x_i^2}{s_i} = \min.$

Отсюда следует, что для произвольных партий i и k должно выполняться неравенство

$$\frac{x_i^2}{s_i} + \frac{x_k^2}{s_k} < \frac{(x_i - 1)^2}{s_i} + \frac{(x_k + 1)^2}{s_k}$$

или

[21] Борткевич сослался на реферативный журнал *Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik*, Bd. 41, 1910, p. 272. Там и на с. 273 приведены рефераты двух статей автора, 1900 и 1910 гг.

В письме № 144 1919 г. Чупров сообщил Борткевичу свое мнение об обеих его статьях 1920 г. (видимо, пользуясь их корректурами, полученными от автора): статьи “весьма любопытны и чрезвычайно вразумительны. Система нечетных делителей была для меня новостью – занятно! За сокращенный прием распределения мест сторонники облегчаемого тобой метода будут тебе очень признательны”. О. Ш.

$$\frac{2x_i - 1}{s_i} < \frac{2x_k + 1}{s_k}, \; \frac{s_i}{2x_i - 1} > \frac{s_k}{2(x_k + 1) - 1}. \tag{37}$$

Последнее неравенство, которое Sainte-Laguë, впрочем, вывел иначе, выражает метод его вычислений. Но к (37) можно придти и иначе, если при $(x_i / s_i) > (x_k / s_k)$ положить

$$\frac{x_i}{s_i} - \frac{x_k}{s_k} < \frac{x_k + 1}{s_k} - \frac{x_i - 1}{s_i}. \tag{38}$$

Вместе с тем при $(x_i / s_i) > (x_k / s_k)$ тем более

$$\frac{s_k}{2x_k - 1} > \frac{s_i}{2(x_i + 1) - 1}$$

и кроме того

$$\frac{(2m - n + 2)s_i}{2S} - \frac{1}{2} < x_i < \frac{(2m + n - 2)s_i}{2S} + \frac{1}{2}.$$

Неравенство (35) соответствует неравенству

$$u_i > u_k - \frac{(s_i - s_k)(1 - 2u_k)}{2s_k}.$$

Таким образом, здесь нет никакого подобного преимущества более многочисленной партии как при методе редуцированных коэффициентов. Метод Sainte-Laguë имеет с методом наиболее точных коэффициентов представительства то общее, что может оказаться, что $x_i < t_i$ (с чем меньше всего можно свыкнуться). В Примере А результат таков: $x_1 = 11$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$, $x_6 = x_7 = \ldots = x_{14} = 0$; в Примере В $x_1 = 8$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_8 = 1$, $x_9 = x_{10} = x_{11} = 0$.

Библиография

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926).* Берлин. Также www.sheynin.de

Bortkiewicz L. von (1919), Ergebnisse verschiedener Verteilungssysteme bei der Verhältniswahl. *Annalen f. soziale Politik u. Gesetzgebung*, Bd. 6, pp. 592 – 613.

Polya G. (1918), Über die Verteilungssystem der Proportionalwahl. *Z. f. schweiz. Statistik u. Volkswirtschaft*, Bd. 54, pp. 363 – 387.

VI. Г. Ф. Кнапп как статистик

G. F. Knapp als Statistiker

Wirtschaftsdienst, März 1922, Beilage zu No. 9, pp. 10 – 12

Из тех событий человеческой жизни, которые являются темой статистического исследования, первое место занимает смертность. Если считать днем рождения современной статистики 5.2.1662 г., когда Джон Граунт представил Королевскому обществу свои *Естественные и политические наблюдения над бюллетенями о смертности*, то никакая другая проблема не рассматривалась столь обстоятельно как смертность. Таким образом, уже давно перестав быть целиной и оказавшись уже двести лет назад вовлеченной в культуру, она является областью, усиленно возделываемой бесчисленными представителями всех цивилизованных наций и самых различных специальностей, среди которых были и самые отборные умы.

В середине 1860-х годов Кнапп вошел в эту область, чтобы испытать методы статистики смертности. И этот 62-летний ученый всё же ввел своим сочинением (1868) нечто принципиально новое, а именно первое строго систематизированное теоретическое основание измерения смертности. Вестергаард (1901, с. 102), у которого нет соперников как у знатока истории статистики смертности, назвал указанный труд и оба позднейшие примыкающие работы Кнаппа (1869; 1874) “новаторскими” в методологическом отношении. Вполне аналогично оценил эти сочинения выдающийся и сведущий статистик Чубер (1899, с. 229), сказавший, что они знаменуют “новый рубеж в области измерения смертности”.

Действительно, Кнапп первым предложил теорию различных “совокупностей живых и умерших”. Под *совокупностью* следует понимать группы, определенные по отношению к границам момента рождения, возраста или сами эти границы, равно как и относительно времени наблюдения или границы этих наблюдений.

Прежде всего требуется отличать эти различные совокупности друг от друга, затем выявить математические связи между ними. В первой из указанных трех работ Кнапп пользовался исчислением бесконечно малых и таким образом рассматривал обновление населения с рождениями и смертями как непрерывный процесс. Во втором сочинении он полностью избегал “любого видимого применения математики”. В третьей работе он снова частично исследовал смертность математически, но уже не предполагая непрерывности. И мы поэтому встречаемся с осложнением при сравнении этих трех изложений друг с другом, однако без того, чтобы как-то умалить их четкость и логичность. Напротив, каждое из них, взятое само по себе, предлагает нечто в своем роде особенное и законченное. Вряд ли какой-нибудь иной ученый в такой же степени как Кнапп неизменно остерегался предлагать общественности научное сырье.

В основу формальной теории населения, т. е. именно учения о совокупностях живущих и умерших, Кнапп смог предложить различные методы для вывода из данного статистического материала порядка вымирания; иначе – для составления таблиц смертности и их описания и верной оценки. Это он сделал с образцовой надежностью и проницательностью, притом не ограничиваясь более глубоким обоснованием или исправлением и развитием методов, ставших к тому времени обычными. Он продвинул и новые методы и частично сам ввел их в практику в королевстве Саксонии.

Мы видим его здесь как статистика-исследователя, еще не превзойденного по точности исполнения и ясности в достижении цели. И в этой связи Кнапп среди прочего обсуждал вопрос о существовании законов смертности и пришел к чисто отрицательному выводу, если *закон* понимать в обычно воспринимаемом в науке смысле. При прочих равных условиях его заключение можно сразу же перенести в другие области статистики. Кнапп вообще допускал и даже считал вынужденным "обширное и расширительное истолкование" того, что было обязательным при изучении смертности.

Кнапп обстоятельно занялся общими и самыми общими проблемами статистической науки в своем научном докладе (1871) и статье (1872a), которые в свое время были замечены многими и с тех пор неоднократно использовались с различных сторон. Он подверг здесь пристальному исследованию учение Кетле и его последователей и особенно его восприятие свободной воли. Ему, как он сказал, пришлось лишь обратиться к "легко возбуждаемой" "потерей драгоценного качества" озабоченной душе. Он предпринял "весьма умеренную проверку" хода мыслей в этом вопросе и убедительно показал, как плохо обоснован был тот из числа последователей Кетле с его еще более, чем у самого Кетле, односторонней и вопиющей точкой зрения о слепом случае, будто бы управляющим статистическими законами. В работах Кетле, которые Кнапп изучил с непревзойденной основательностью, он выявил нестрогое введение понятий, многочисленные сомнительные аналогии, внутренние противоречия и странные представления. Несмотря на всё это, Кнапп восхвалил Кетле за "непреходящую заслугу" "смелой попыткой обогатить социальную науку путем облагораживания статистики". В последней Кетле с полным правом заметил "реалистическое подспорье для распознавания общества как медленно развивающейся и подверженной самым различным влияниям сущности, обладающей собственной структурой".

Подобным признанием заслуг ученого, ориентированного совсем иначе, чем он сам, Кнапп красноречиво засвидетельствовал свое умение, свою готовность вполне справедливо оценивать чуждый ему склад характера. И то же верно по отношению к Мальтусу, чьи взгляды он во многом отрицает. В его докладе (1872b), в котором он мастерски описал отношения между теорией эволюции и учением о населении, мы находим красивое и удачное изречение: "Зюссмильх создал тело учения о населении, Галлей – ее душу, а Мальтус – ее дух"[1].

Чтобы пополнить картину заслуг Кнаппа в статистической области, следует еще вспомнить о его работе в качестве директора статистического бюро Лейпцига, выпустившего в свет восемь *Сообщений*, – тетрадей ценных статей по статистике населения, социальной и финансовой статистике. Приглашение [ординарным профессором] в Страсбург в октябре 1874 г. положило конец этой статистической деятельности, и единственным поводом к теоретическим занятиям по статистике после этого оказались его лекции по *Теории и практике статистики*, иногда и по математической статистике, которую он, впрочем, прекратил читать в 1890-е годы, а также упражнения по государствоведению, не исключавшие статистических тем. Так определился статистический период в научной карьере Кнаппа, продлившийся всего лишь девять лет, если считать, что он начался с его участием в семинаре Энгеля в Берлине (1.11.1865). И этот период оказался значительно короче, чем каждый из двух последующих, а именно посвященных истории социальных отношений в сельском хозяйстве и теории денег, но не менее успешным и плодовитым. Уже давно являясь "стариком" статистики, Кнапп с неослабевающей силой продолжает оказывать влияние в этой области своими сочинениями, которые неуязвимы для времени, и побуждает своих поклонников брать с него пример при следовании по проложенному им пути[2].

Примечания

1. Изречение действительно красивое, но вряд ли удачное. Душа оказалась созданной раньше тела, и непонятно, в чем состоял мальтусовский дух. Во всяком случае, он скорее относился к социальным наукам в целом. О. Ш.

2. Мы добавим. Закончив "статистический период" своей деятельности, Кнапп не одобрил желания Чупрова написать статистическую диссертацию. Зато он методически помог своему ученику улучшить текст диссертации на вынужденную, но основательно подготовленную тему о земельной общине. Этот эпизод хорошо известен. О. Ш.

Библиография

JNÖS = *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*

Czuber E. (1899), Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. *Jahresber. Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 7, No. 2. Отдельная пагинация.

Knapp G. F. (1868), *Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik.* Leipzig.

--- (1869), *Die Sterblichkeit in Sachsen nach amtliche Quellen dargestellt*, Tle 1 – 2. Leipzig.

--- (1871), Die neueren Ansichten über Moralstatistik. JNÖS, Bd. 16, pp. 3 – 16.

--- (1872a), Quetelet als Statistiker. JNÖS, Bd. 18, pp. 89 – 124.

--- (1872b), Darwin und die Sozialwissenschaften. Там же,с . 233 – 247.

--- (1874), *Theorie der Bevölkerungswechsel*. Braunschweig.

--- (1925), *Ausgewählte Werke*, Bd. 1. München – Berlin.

Westergaard H. (1901), *Die Lehre von der Mortalität und Morbilität*. Jena.

А. А. Чупров

Уничтожение сельской общины в России

The break-up of the village community in Russia.
Economic Journal, vol. 22, 1912, pp. 173 – 197

Предисловие переводчика

Все стороны жизни деревенской общины занимали Чупрова на протяжении многих лет. Еще в 1902 г. он опубликовал книгу на эту тему, за один раздел которой в 1901 г. ему была в Страсбурге присуждена степень доктора государствоведения. Успешно рекомендуя Чупрова в члены-корреспонденты Российской академии наук, Струве и др. (1917/1996) высоко оценили ее и специально отметили, что Чупров не ограничился изучением общины в России. Русскую деревню и, в частности, противоречия точек зрения народников и марксистов по аграрному вопросу изучали и студенты Чупрова (Борткевич и Чупров 2005, Письмо № 71 1903 г.; Шейнин 1990, с. 12). Сам он в 1905 – 1906 гг. опубликовал четыре статьи по этой же теме (Шейнин 1990, с. 128), в 1906 – 1911 гг. – не менее 22 статей, и еще несколько – позже 1912 г. в московской газете *Русские ведомости* (там же, с. 131 – 134); без ссылки на нашу брошюру названия этих статей привел Орлов (1996, с. 39), хотя найти их он нигде больше не смог бы. И, заметив в переводимой ниже статье (конец п. 4), что в 1912 г. "жестокость и несправедливость" по отношению к общинам были "сразу же разоблачены в прессе", Чупров вполне мог бы сослаться на самого себя.

В своем выступлении, посвященном памяти Чупрова, Розенберг (1926, с. 12 – 13) привел выдержки из его позднейших газетных статей. Точных ссылок он не привел, но по контексту следует, что они были опубликованы в 1913 г. И настроен Чупров был уже не так, как раньше: "Сломить сопротивление тех 130 тысяч, что держат в своих руках судьбы 150-миллионного народа, мы не умеем".

Мы полагаем, что статья Чупрова интересна и сейчас, в частности потому, что он аккуратно осветил историю русской общины в юридическом плане и насколько возможно использовал в ней статистические материалы. И один из выводов, который напрашивается из его соображений, быть может недостаточно обсуждался. Именно, столыпинская реформа 1912 г., будь она проведена и раньше, не помешала бы успеху революции 1917 г.

В конце своего исследования Чупров обсуждает выходы из общины, число которых резко возросло в результате реформы. По этому поводу см. позднейшую статью Кочаровского (1925).

В 1909 г. Эджуорт, редактор журнала *Economic Journal*, по поручению Королевского экономического общества предложил Чупрову стать корреспондентом общества по России. Чупров согласился лишь представить рукопись статьи об общинах в России, но всё же стал корреспондентом (Шейнин 1990, с. 18). Рукопись (на немецком языке) Чупров действительно послал, но редактором к тому времени стал Кейнс. И вот отрывок из письма

Кейнса 1912 г. Чупрову (там же, с. 13, в переводе; с. 125, в оригинале):

В письме, которое я послал Вам несколько раньше в этом году, я предположил, что статья может оказаться [после перевода с немецкого] *длинноватой, но, прочтя ее еще раз, я полагаю, что она столь интересна и сжата, что буду рад опубликовать ее в точности в ее нынешнем виде.*

На смерть Чупрова Кейнс откликнулся кратким некрологом (1926).

В тексте статьи немало уточняющих вставок в квадратных скобках, либо наших собственных, либо, в основном, Л. Б. Шейнина. Он же приложил отдельный комментарий.

О. Б. Шейнин

1. Недавние события в структуре сельского хозяйства в России не привлекли большого внимания за пределами страны, а между тем они очень интересны и для государственных деятелей, и для экономистов. Действительно, никто из тех, кто желает понять борьбу, которая происходит сейчас на территории под владычеством царя, не может позволить себе пренебрегать ими.

Россия – крестьянская страна, и ее крестьянство образует основу ее экономического положения в мире и на него же опирается военная мощь империи. Фабрики, несмотря на их быстрое развитие в течение последних десятилетий, всё еще сравнительно малозначимы. Во время переписи 1897 г. в торговле и промышленности было занято не более шестой части населения и вряд ли восьмая его часть проживала тогда в городах. Крупное землевладение, которые 50 лет назад играли ведущую роль в экономической жизни нации, так и не оправились после потрясения, нанесенного им освобождением крепостных.

Приученная к сонным методам патриархальной системы, основанной на труде крепостных, землевладельческая знать (nobility) не смогла приспособиться к новым условиям. Выкупные, уплаченные освобожденными крестьянами [за отошедшую им землю], были истрачены непродуктивно, а не инвестированы. Мало кто попытался изменить свои методы управления разумным образом, приспособленным к новому юридическому и коммерческому положению, а большинство тех, кто всё-таки попробовал сделать это, испытали неудачу, потому что у них не было умственных качеств, необходимых для успешной работы в современных промышленных условиях. Большинство землевладельческой знати предпочло доверить пользование оставшейся у нее земли крестьянам. Земля либо использовалась в прежнем обычном порядке окрестными крестьянами которые обрабатывали ее своими лошадьми и своим инвентарем [отработки], либо отдавалась в аренду крестьянам, которые были полны желанием получить ее, потому что при освобождении большинство из них не получило достаточного надела и они рады были платить за нее несоразмерно своей выгоде.

Поместья использовались почти только как источник получения арендной платы, и связи, соединявшие землевладельческую знать с ними, поэтому ослабели во всех своих звеньях и неудивительно, что их легко было разорвать. Чтобы позволить знати после освобождения, когда иссякли капитализированные выкупные платежи, вести прежний образ жизни в соответствии со своим рангом, потребовалось больше, чем земля, остававшаяся у них, могла приносить при традиционных методах возделывания.

Но знать не была в состоянии поднять арендную стоимость своей земли ни разумным изменением управления, ни притоком свежего капитала и лучшим знанием дела. Не оставалось ничего другого, кроме как урезать еще больше стоимость своей собственности. Леса вырубались на обширных площадях, кредит за заложенную землю безответственно расходовался, и тем более свободно, потому что специальный банк, учрежденный правительством к выгоде землевладельческой знати, выдавал деньги под имения дворян на исключительно благоприятных условиях. Но получаемые деньги тратились так же непроизводительно, как раньше выкупные платежи. Разорение представлялось неизбежным, и русское дворянство начало беспримерно быстро распродавать свои земли. Уже в конце 1870-х годов пятая часть земель, удержанных знатью после освобождения [крепостных] в 1861 г., перешла в руки общинников (commoners). Налоговое обложение (levy) 1887 г. выявило дальнейший серьезный упадок, а последующие 20 лет не изменили этой тенденции: сельскохозяйственная статистика за 1905 г. показывает, что за 45 лет дворянство передало половину своих поместий простонародью.

Затем подоспели годы революции и крестьянских волнений. В чисто русских губерниях насилия над личностью землевладельцев были редкими, но многие дома и сельскохозяйственные постройки сносились бунтующими крестьянами, скот забивался и инвентарь портился. Жизнь в деревне оказалась настолько расстроенной, что многим землевладельцам не хватало мужества вернуться в свои разрушенные дома, чтобы отстроить их заново.

В течение 1906 – 1907 гг. более 10 миллионов десятин, – добрая пятая часть земель, еще принадлежавшая знати, – была выставлена на продажу в Крестьянский банк. Казалось, что для землевладельцев пробил последний час. Правительство, обеспокоенное судьбой знати, приняло теперь решительные меры. Чтобы ослабить панику, Сельскохозяйственному банку было предложено покупать выставляемую на продажу землю за высокую цену, особенно в районах, наиболее затронутых крестьянскими волнениями. Более трех миллионов десятин, – столько же, сколько сельскохозяйственных земель находится в Саксонии, Вюртемберге и Бадене вместе взятых, – было куплено государством в течение трех лет.

Цель была достигнута: возобладало какое-то спокойствие. Вера, что правительство защитит, восстановилась. Исчезло опасение, что цены сильно снизятся и прекратилась продажа имений в спешке, для предотвращения потери ими всей своей цены. Темп ухода знати от земли постепенно снизился до своего прежнего уровня в несколько сот тысяч десятин ежегодно.

Но знать, экономическая неспособность которой угрожала основам ее собственного существования, удерживала в своих руках реальную власть. Нигде в мире не существует такого выраженного противоположения между политическим верховенством и экономической слабостью класса. И поэтому очевидно, что до тех пор, пока аппарат правительства находится под надзором [помещиков], попытки использовать его с целью продвинуть классовые интересы для достижения какой-то меры их экономической мощи будут продолжаться.

Многое в русском экономическом законодательстве можно понять только в свете этой борьбы политическими средствами за экономическое существование знати. Представление о том, что реально способствует ее интересам, часто изменялось с годами и соответственно менялась государственная политика. Так, длительное время землевладельцы, нуждающиеся в рабочей силе, считали противным своим интересам отток крестьян из Европейской России в Сибирь и соответственно правительство пыталось препятствовать этому процессу. Но затем начались крестьянские волнения и испуг привел к тому, что показалось желательным вытеснить неспокойных, тем более, что ввиду быстрого роста населения в плодородных [в черноземных] губерниях внутренней России стал заметен не недостаток рабочей силы, а ее избыток.

Мнение в правительственных кругах о значении переселения сразу же изменилось. Не только были отменены прежние к тому препятствия, но его стали непосредственно поощрять всеми способами, особенно в районах, затронутых волнениями. Отсутствие условий для приема столь возрастающей волны переселенцев в тех местах, куда она стремилась, не учитывалось [плохо учитывалось].

Подобным же образом изменения в отношении законодательства к сельской общине могут быть поняты только в связи с преобладающим мнением об интересах знати. До тех пор, пока землевладельцы считали деревенскую общину полезной, ей покровительствовали и поддерживали ее вопреки тенденциям, проявлявшимся в ней самой. Но крестьянские волнения в начале нового века привели к мысли, что община представляет собой благодатный психологический рассадник свойственной лишь русским крестьянам идеи о том, что вся сельскохозяйственная земля должна быть поделена между ними. И, чтобы с корнем выкорчевать эти зловещие понятия, Императорский указ 9 (22) ноября 1906 г. немедленно принял решительные меры по уничтожению общины.

2. Характерные черты русской общины хорошо известны. За исключением дома и полоски прилегающей земли, которые остаются в семье в качестве собственности, переходящей по наследству, общинник не может заявлять права собственности ни на какую землю. Пахотная земля и луг, лес и пустошь, – всё принадлежит общине и отдается каждому крестьянину лишь во временное пользование. Он получает землю не по наследству, а потому, что ее выделяет община, и он владеет землей лишь до тех пор, пока община считает это уместным. Луга, как правило, делятся ежегодно между ее членами непосредственно перед косьбой.

Пахотная земля обычно передается на более длительный срок, – в соответствии с законом 8 июня 1893 г. не менее, чем на 12 лет, – в многочисленных случайно разбросанных полосках[1]. По окончании этого срока земля перераспределяется. Все участки забираются от своих фактических владельцев и каждому отцу семейства возвращают такую часть общего фонда, на которую он имеет право в соответствии с методом раздела, принятым общиной.

Раздел происходит либо по числу лиц мужского пола в семье, либо по их числу работоспособного возраста в семье, но часто по числу членов семьи без различия пола и возраста. В принципе вся эта система приводит, следовательно, к тому, что семьи, число членов которой за годы, прошедшие с последнего раздела земли, возросло больше, чем в среднем, получат землю за счет тех семей, которые размножились не так быстро.

Это странное взаимное страхование от ущерба, наносимого слишком быстрым ростом семьи, до последнего времени преобладало в большинстве губерний Европейской России. Ему было юридически подвластно около десяти миллионов крестьянских семей со ста миллионами десятин земли, т. е. более чем с 4/5 земли, выделенной крестьянам при освобождении. Фактически, однако, не все общины применяли данные им по закону права одним и тем же образом. Были такие, в которых земля не перераспределялась так давно, что представляется, будто крестьяне там отказались от всех своих прав на подобные переделы. Были и другие общины, в которых право на получение земли ограничивалось членами старых семей, проживавших в деревне во время освобождения, так что их система приобрела своеобразный характер, напоминающий тонтину[2]. Но даже там в соответствии с существующим законом требовалось лишь согласие 2/3 глав семейств для перехода к перераспределению земли по обычным для иных общин принципам.

И поэтому ни длительное пренебрежение переделом, ни выбор для него метода, отличного от обычного, нельзя считать достоверным свидетельством того, что крестьяне отказались от этой странной системы страхования. Часто после многих лет видимого спокойствия в общине появлялось всё растущее недовольство, сохранявшееся до тех пор, пока не удовлетворенные существовавшим распределением земли не побеждали и не добивались более справедливого, по их мнению, раздела. Так, вторая половина 1870-х годов была отмечена многочисленными переделами в тех общинах, в которых подобного исправления не производилось с тех пор. когда они получили землю при освобождении крепостных.

Вместе с этой классической формой общины, которая сохраняет за собой право определять размер наделов ее членов, мы часто видим в России сельскохозяйственные объединения, в которых власть общины менее обширна. К примеру, в уездах (districts) военного заселения, которое в XVI веке шло от Москвы на юг, преобладает так называемое долевое владение (Anteilsbesitz [этот термин в немецкой рукописи Чупрова был сохранен в ее английском переводе])[3]. Часть собственности [пашня], которая принадлежит здесь каждой семье, не зависит от решений общины, а определяется по наследству. С другой стороны, расположение [пахотных полос в составе] наделов не закреплено, поскольку община может изменять его по своему усмотрению, например, с целью их объединения.

А в некоторых уездах, особенно ближе к западной границе, в возделывании земли часто имеет место принуждение в той же форме, в которой оно так часто встречается вне России, а именно в форме взаимной зависимости методов культивации и выполнения сельскохозяйственных работ у отдельных хозяйств (cultivators), которая определяется расположением их земель[4].

На Дальнем Востоке, в редконаселенных степях Сибири и Центральной Азии сельские общины существуют в их самой ранней стадии. Там, где свободной земли сколько угодно, никто не думает о своих соседях или об их наделах и нет никаких общих предписаний для условий владения землей или ее возделывания. Какая-то форма устройства общины постепенно развивается лишь с ростом населения, обычно посредством долгих и часто упорных споров между теми, кто заполучил больше земли и притом лучшего качества, и менее счастливыми остальными. Начиная с уступок, вначале совсем незначительных, со стороны первых, постепенно происходит более серьезное ущемление прав личности, пока, наконец, полномочия общины предписывать условия владения землей и ее возделывания не оказываются общепризнанными[5]. Затем должно пройти еще какое-то время, пока покушения со стороны общины не примут формы обычного периодического перераспределения земли, с которой мы знакомы по Европейской России.

Более тщательное наблюдение за нынешним состоянием общины в России таким образом представляет нам многокрасочную картину. Здесь видны все ее формы, от зародышевой до высшей, некоторые же общины даже находятся в достаточно продвинутых стадиях распада. В одном месте община процветает при всеобщем ее признании довольными крестьянами; в другом, она учреждается лишь после жестоких схваток; в третьих местах вверх берут причины, неблагоприятные для общины и постепенно ослабеваемый коммунизм переходит к основательному установлению частной собственности [на землю].

3. Ясно, как трудна и насколько ответственна задача законодательного упорядочения таких разнообразных условий с учетом необъятных просторов Российской Империи, существенных различий в образе жизни и методах возделывания земли у населения и возникающих вследствие всего этого различий в структурах общины. Чтобы законодатель достиг цели, но не слишком задел за живое, его меры должны быть тщательно взвешены и точно приспособлены к существующим условиям. Предписание, вполне подходящее определенным условиям жизни и воспринятое теми, кто подпадает под него, как благоприятное, в других случаях не достигнет цели и будет сочтено тягостным. При таких обстоятельствах единообразные и жесткие правила малополезны; те, же, которые определяют жизнь в общине, должны быть так же гибки, как основные установления самого этого объекта.

Трудности, уязвляющие законодателя, усугубляются страстью, с которой общественное мнение в России наблюдает за судьбой общины. Вряд ли есть какая-либо иная проблема экономической политики, которая обсуждается здесь столь упорно и пылко, как выбор между ее упразднением и сохранением. Обладает ли община жизненной силой или нет? Благотворно или вредно ее влияние на жизнь крестьянина? Эти вопросы горячо обсуждались даже при подготовке к освобождению крепостных и сегодня о них всё еще спорят вряд ли с меньшим жаром. В то время общину поддерживали, с одной стороны, славянофилы, которые отстаивали наделение землей общин, потому что видели в них институт, возникающий из глубочайших корней русского национального духа, равно как и могущественную защиту от распространения прогнившей “западной” цивилизации. С другой стороны, общину защищали “интеллигенты”, сгруппировавшиеся вокруг Чернышевского, влиятельного вождя молодых русских социалистов и видевшие в общине трамплин для своего перехода в царствие социализма.

Что касается противников общины, которые полагали, что благополучие освобожденных крестьян будет обеспечено наделением землей отдельных семей, то они восприняли веру манчестерского либерализма и ненавидели общину как одно из отвратительных ограничений свободы отдельного человека в экономической деятельности. Они, однако, не смогли вполне успешно провести свое мнение в жизнь: у правительства не хватило мужества на коренные меры, как, например, на запрещение общины, что усилило бы технические трудности реформы [освобождения]. Земля была передана общинам, на которые была возложена дальнейшая задача ее раздела по семьям. Но считалось, что признание общины являлось временной уступкой и что выгоды частной собственности вскоре станут явными и крестьяне стихийно покинут общинную систему.

Соответственно, юридические установления, относящиеся к общине, оказались (частично, правда, ввиду несколько ограниченных сведений) неприспособленными ни в каких отношениях к ее сути и сложности. Сбудься ожидания скорого распада общинной структуры, эти меры могли бы тем не менее облегчить дело. Но община выказала гораздо больше, чем было предвидено, жизненной силы, что привело к усилению борьбы между сторонниками создания благоприятных для нее юридических положений и приверженцами окончательной отмены общинной системы. Эта борьба с переменным успехом и без существенного изменения приводимых доводов продолжается до сегодняшнего дня и даже самая недавняя радикальная реформа, направленная на полное уничтожение общины, оказалась неспособной достичь своей цели.

Полный отчет о доводах, которые каждая сторона уточняла в течение нескольких поколений, увела бы меня слишком далеко. При существующем состоянии наших знаний спокойный обзор причин за и против общинной системы вряд ли приведет к каким-либо выводам кроме как к заключению о том, что и надежды, и страхи, с которыми рассматривалась община, были значительно преувеличены.

Община, говорят ее противники, является почти непреодолимым препятствием техническому прогрессу в сельском хозяйстве, и именно в этом направлении, когда неограниченная частная собственность предоставляет свободный простор творческой предприимчивости отдельного человека, возможен прогресс. Четверть века назад подобных мнений можно было придерживаться с чистой совестью, хотя уже тогда не было недостатка в критиках, которые в подробностях указывали на их пристрастность. Теперь же, когда у нас перед глазами так много примеров необычно быстрых технических усовершенствований, как принятие общинно-принудительного возделывания крестьянами почвоулучшающих культур, и притом именно в тех уездах, в которых наиболее твердо укоренилась общинная система, указанного мнения может придерживаться только тот, кто не понимает или не хочет понять те условия, про которые он судит. Община несомненно *может* при определенных обстоятельствах оказываться тормозом технического прогресса, но это не обязательно так. Напротив, если люди [члены общины] понимают, как управлять ей, она может фактически служить рычагом, способствующим прогрессу.

В 1892 г. две общины Волоколамского уезда Московской губернии заменили традиционную трехполку, которая, ввиду недостатка лугов и пастбищ, очень заметного в Центральной России, не смогла обеспечить достаточно земли для выпаса скота, восьмипольной системой и возделыванием лугового клевера. Этот пример оказался удачным и его вскоре переняли в соседних уездах. В 1893 г. семь других уездов начали возделывать клевер, в 1894 г. – еще 14, а за следующие пять лет это же нововведение восприняли 127 общин.

Таким образом, благодаря помощи специалистов на службе местных властей, которые понимали как действенно приспособиться к особенностям общинной структуры, в течение шести или семи лет на половине крестьянских земель уезда была проведена далеко идущая замена методов возделывания земли. Также и в других уездах, если власти обращали достаточно внимания на нужды крестьян (cultivators), дело продвигалось столь же быстро. В Верейском уезде аналогичное движение началось в 1897 г. и за десять лет замена уже произошла более, чем на 3/5 крестьянских земель. В настоящее время в пяти уездах Московской губернии клевер постоянно возделывают не менее половины крестьян; в четырех уездах он вошел в севооборот у 1/4 – 1/2 крестьян и лишь в четырех других, относящихся к более индустриализированным, в которых перемены начались всего позже, это отношение менее 1/4. Всего в 1910 г. клевер возделывали 1660 общин, владеющих 522 тысячами десятин пахотной земли, что составляло 32% крестьянских земель губернии. Во многих других губерниях (в Вятской, Тверской, Смоленской, Владимирской, Калужской и др.) достигались столь же хорошие успехи как только техническое обучение (без которого крестьянин, принадлежи он к общине или нет, обойтись не может) было устроено должным образом.

Этот прогресс следует сравнить с распространением возделывания клевера крестьянами в тех странах, в которых нет общин, после чего можно будет судить о приписываемом им неизбежном отсутствии такого продвижения.

Факты таким образом полностью обманули надежды противников общинной системы, однако и ее доброжелатели также не избежали разочарования. Считалось, что община явится достаточным препятствием росту неимущего пролетариата. При сельскохозяйственной системе, которая обеспечивает каждому одни и те же права на получение земельного надела от общины, каждый работоспособный всегда сможет заработать на жизнь своим собственным трудом (husbandry), потому что средства производства никогда не подведут его. Такова была картина, которую люди были рады нарисовать, но действительность оказалась иной.

С одной стороны, не все общины тем же самым образом используют свои права по распределению земли среди своих членов в соответствии с 2/3 их голосов. Во многих случаях, например, женщин при этом не учитывают, так что семьи, дети которых только девочки, почти ничего не получают. Далее, переделы часто надолго откладываются, а в некоторых случаях принята система распределения, при которой нет и стремления к равенству и, наконец, получение земли еще недостаточно. Крестьянин должен иметь в своем распоряжении достаточное поголовье домашнего скота (livestock)[6] и инвентаря, которые не принадлежат общине и не делятся поровну время от времени. Таким образом, если член общины потеряет свою скотину ввиду какого-либо несчастья, получение земли, выделенной ему общиной, мало ему поможет. Поскольку он не сможет засеять свою землю, он приходит в состояние, в котором его вряд ли отличишь от пролетария.

Наконец, нельзя забывать, что при традиционных методах возделывания земля, переданная крестьянам при их освобождении, была чаще всего недостаточна для прокорма их семей и крестьяне вынуждены арендовать землю у землевладельцев. Легко понять, что при таких условиях даже самый справедливый раздел общинной земли не спасет всех ее членов от сельскохозяйственного разорения. И статистика показывает, что даже в тех уездах, где общинная система особенно крепка, процент лиц, которых следует фактически причислить к пролетариату, не мал и не убывает.

Представление о том, что община является первым шагом к социализму, основано на таких смутных психологических рассуждениях в умах и восторженных сторонников этой цели, и тех, кому она ненавистна, что оно скорее относится к разряду впечатлений (которые в этом случае, как и в столь многих других, тем не менее имеют большой вес), чем к доводам, которые можно учитывать.

Тот факт, что столь значительная доля народной собственности не переходит по наследству, действительно мог способствовать предотвращению расцвета индивидуализма в России во всех классах до такой же степени, как в других развитых странах. В этом смысле общину можно, пожалуй, с какой-то долей справедливости назвать благоприятной почвой для социалистических мнений. Но поскольку так много других причин действовало и действует в том же самом [социалистическом] направлении, результат вряд ли изменился бы, не будь даже содействия этого конкретного фактора.

Еще в меньшей степени поддается расчету непосредственное воспитывающее влияние, которое приписывается практике перераспределения земли. В тех случаях, когда передел происходит спокойно и мирно, при общем признании его справедливости, можно вполне предполагать, что эта практика оставляет необходимые следы в образовании определенного чувства солидарности и более глубокого взаимного понимания и доверия. Но большинство в 2/3 голосов, необходимое для осуществления нового раздела, часто основано на самом сложном объединении различающихся друг от друга интересов и навязывается активно сопротивляющемуся меньшинству, что иногда заканчивается драками и даже кровопролитием. И, кроме того, чувство солидарности как правило распространяется лишь на узкий круг членов общины. К посторонним, даже жителям той же деревни, отношение обычно такое же, какое было бы без всякого общинного воспитания. И подобный образ мышления поэтому обеспечивает вряд ли лучшую основу для социалистического государства, чем обычное семейное чувство с присущим ему семейным эгоизмом.

Я не собираюсь рассматривать по порядку все доводы за и против общины, которые были выдвинуты в подробностях при этой литературной вражде на протяжении жизни целого поколения. Подобное исследование мало повлияет на непредвзятый анализ. Нет никаких свидетельств такого осязаемого ущерба, которые, видимо, оправдали бы политику принуждения крестьян к выходу из общины. Но, с другой стороны, преимущества этой системы слишком неопределенны, что не позволяет с достаточной уверенностью придти к решению в ее пользу, даже если рассматривать ее с точки зрения социалистического идеала. И таким образом в качестве правила поведения государства по отношению к общине явно предписывается нейтральность.

Общинная система не должна навязываться тем, кого она больше не устраивает, но она и не должна насильно уничтожаться в тех местах, где она всё еще приспособлена к склонностям крестьян, которые до сих пор придерживаются ее. Предпочтительно установить такое юридическое положение, при котором те, кого общинная система больше не устраивает, могли беспрепятственно покинуть ее, но без ущерба для остальных; а те, кто желает придерживаться общины, могли оставаться в ней таким образом, чтобы быть как можно более действенно защищенными от возможных недостатков общественного сельскохозяйственного объединения. Такова проблема законодателя, который отнесся бы к ней *без гнева и пристрастия*.

4. Как же решить эту проблему? Рассмотрим вначале ее главное звено, перераспределение земли. Пусть член общины не желает больше участвовать в этой особой форме страхования и подвергаться риску уступить часть своего надела, если его семья не будет расти достаточно быстро. В соответствии со сказанным выше, нет надлежащих причин для запрещения или затруднения его выхода из общины. Но как тогда можно будет упорядочить его притязания, чтобы не пострадал ни он сам, ни те члены общины, которые остаются в ней?

Если понимать общину как периодически возобновляемое соглашение о [земельном] страховании, то представляется, что от него удобнее всего отказаться при очередном перераспределении, потому что это тот момент, на который прекращается расчет за предшествующий период, после чего соглашение и может быть возобновлено. К этому моменту взаимные обязательства вполне ясны. Если, например, землю по обычаю делят по числу членов семей, то семьи, которые за указанный период удачливо выросли быстрее, чем в среднем, получат землю за счет тех семей, чьи надежды на рост не сбылись. После такого мысленного расчета все, будь то выигравшие или оказавшиеся в убытке, могут спокойно считаться свободными либо заключить подобное же соглашение на будущее, либо отказаться от этого.

Дело не так просто, если из общины выходят в период между двумя переделами. И вообще сомнительно, следует ли предоставлять членам общины право выхода из нее в любое время, или же предпочтительнее установить некоторые ограничения. Но если выход разрешен, то и в этом случае легко определить наибольший размер надела, на который имеет право покидающий общину. Ясно, что этот размер не может превышать причитающегося, производись перераспределение в тот же момент. После установления его прав, возникает новая проблема: как их удовлетворить? Если оставить в стороне спорный вопрос об условиях, при которых наделение землей следует заменить денежной выплатой, узы общины могут быть разорваны двумя способами. Либо покидающий ее получает определенные участки, либо его доля в общей собственности только устанавливается раз навсегда, но община сохраняет при этом право определять действительное положение его участков так же, как и для тех своих членов, которые участвуют в переделе.

Можно несомненно сказать многое в пользу первого решения, если земля передается в едином наделе, который притом расположен удобно и для покидающего общину, и для остальных. Но если он получит свои прежние, случайным образом разбросанные участки, то лишение общины права в случае необходимости обменивать участки вполне может привести к невыгодной системе возделывания. Сохранилась бы нынешняя система взаимозависимости управления сельскохозяйственными работами [принудительный севооборот], а ныне имеющиеся средства для смягчения ощущаемых недостатков случайного распределения земли не смогли бы более применяться.

Назначение разъединенных участков лицу, покидающему общину, может даже немало воспрепятствовать объединению участков ее членов. Поэтому, если невозможно выделитьть ему его надел в едином участке, было бы намного лучше установить его долю земли. Но наделение землей в едином участке возможно лишь в исключительных случаях, поскольку другие крестьяне не будут участвовать в обмене наделов. А поскольку подобный обмен сопровождается расходами и нарушением производства, то очевидно, что отдельному члену общины не должно быть предоставлено право требовать его в любой момент по своему желанию. Таким образом, выход из общины, если он не совпадает по времени с общим перераспределением, должен, как правило, принимать форму перехода к долевому владению.

Таковы общие черты беспристрастного решения проблемы, основанного на рассмотрении фактов. Но эти черты никогда не были осуществлены в законодательстве, поскольку ни противники, ни сторонники общинной системы не хотят согласиться с таким решением. Действительно, в соответствии с тем, которая из этих сторон временно берет вверх, принимаемое решение всегда уклоняется то в одну, то в другую сторону. Во время освобождения крестьян думали, как это сказано выше, что община долго не удержится и что крестьянин вскоре перейдет в частные собственники, и было желание по возможности облегчить этот переход. Но обойтись без общины не смогли, потому что крепкие путы, наложенные на ее членов, обеспечивали [казне] получение выкупных платежей.

Облегчение для отдельных лиц (the way out) было достигнуто тем, что каждый получал право выхода из общины с выделенными ему на то время [пахотными участками его] надела, если только он уплатит долю выкупных, приходящуюся на них. Это условие оказалось в сильнейшей степени неблагоприятным для общины, однако длительное время практически никто не воспользовался преимуществом выхода. Выкупные платежи были очень высокими, и мало кто на таких условиях пожелал стать собственником удерживаемой им земли. Но положение постепенно изменилось. Цены на землю выросли, долг по выкупным платежам уменьшился и его остаток сокращался с каждым годом, и наконец пришло время, когда описанная статья закона стала практически значима. Выгода для тех, кто покидал общину, часто была существенной. Одна-единственная небольшая уплата избавляла крестьянина от обязанности отдать часть своей земли при ее перераспределении и позволяла удержать ее у себя. И поэтому число тех, кто в течение 1880-х годов воспользовался этой статьей закона, начало быстро возрастать.

В 1892 г. сумма выкупных, выплаченных таким образом, достигла беспримерного размера 800 тысяч рублей. Не надо было быть горячим приверженцем общинной системы, чтобы признать несостоятельность [невыгодность для общины] подобного юридического положения. Его несправедливость была очевидна и в 1893 г. поклонники общины сумели видоизменить закон. Они, однако, не воспользовались возможностью перехода к устойчивому равновесию, при котором были бы в равной мере защищены интересы и покидающих общину, и остающихся в ней. Напротив, ввиду желания укрепить общину пожертвовали справедливыми притязаниями первых на не слишком обременительный выход из нее. По указу 14 декабря 1893 г. выход из общины допускался с ее разрешения, так что право выхода стало пустой мечтой. С тех пор членство в общине для тех, кто в ней родился, оказалось на деле почти обязательным. Это сразу же выявилось по числу выходов: в 1892 и 1893 гг. суммы, [ежегодно] уплачиваемые при выходе, достигли примерно миллиона рублей, но во второй половине 1890-х годов они упали ниже 50 тысяч.

Итак, закон 14 декабря 1893 г. привел к такому же мало приемлемому положению, как и предыдущий. Ибо для мирного развития сельскохозяйственного объединения крестьян существенно, чтобы выход из общины [из него] был возможен желающему без потери права на собственность, в противном же случае община начинает подвергаться слишком сильным и полностью оправданным нападениям. Не прошло и десяти лет, как началась новая реформа. На этот раз дело было подготовлено с размахом. Все законы, затрагивающие положение крестьянства, должны были быть пересмотрены совместно и сведены в единое уложение.

В 1903 г. был подготовлен и опубликован законопроект с большим разделом, посвященным полному переустройству общинной системы. Выход из общины устанавливался следующим образом. Каждый мог покидать ее при очередном перераспределении, если только соглашался взять намеченную ему землю в едином наделе[7]. Наделение собственностью в виде случайно разбросанных полосок, равно как и переход к долевому владению явно считались нежелательными. С другой стороны, в период между переделами выход допускался только, если его пожелает одновременно 1/5 часть членов (или, в очень крупных общинах, 50 членов). Степень этого ограничения не проглядели, но она была признана необходимой, потому что, как указывалось в предисловии, право отдельного лица в любое время требовать выделения земли в едином наделе привело бы к невыносимой жизни для остальных ввиду непрестанных нарушений землепользования и заставило бы [также] и их покинуть общину. Принудительной отмены общинной системы законопроект не добивался.

Этому нововведению, разработанному в то время, когда министром [внутренних дел] был Плеве, была уготована печальная судьба. Отложенное ввиду смерти Плеве [убитому при террористическом акте] и последовавших событий, оно так и не было обсуждено, и вначале дела продолжались как шли по указу 14 декабря 1893 г., но затем Императорский указ 9 (22) ноября 1906 г., полностью покровительствующий покидающим общину, всё изменил. Он не только не предоставил никакой защиты интересам остававшихся, но умышленно вредил им, имея в виду нанести смертельный удар общинной системе.

Все общины делились на два разряда. К первому отнесли те, в которых за последние 24 года земля не перераспределялась. Без дальнейших церемоний их посчитали лишившимися жизненной силы, и каждому их члену было разрешено перевести назначенные ему общиной участки земли в свою собственность [одним лишь] прошением в правомочное на то учреждение, притом не заручаясь согласием общины и никак более не озабочиваясь интересами ее членов. Что касается общин второго разряда, правительство не посмело объявить их стихийно распустившимися. Но был найден косвенный путь, который привел бы почти к тому же результату. Каждому члену такой общины было разрешено выйти из нее в любое время и сохранить за собой в качестве собственности все участки земли, назначенные ему во временное пользование. Покидающий общину был лишь должен в определенных случаях уплатить ей небольшое денежное возмещение за часть своих участков, никак не соответствующее реальной цене земли.

Оплачиваемая часть определялась следующим образом. Покидающий общину безвозмездно сохранял за собой такую долю выделенной ему при последнем переделе земли, на которую он мог притязать, состоись новое перераспределение в момент его выхода. Если еще оставался остаток, он должен был уплатить за него ту цену, которая существовала на момент, когда община была наделена землей во время освобождения крепостных.

Ни одно из этих установлений не выдерживает обдуманной критики. По существу их ни в коей мере не следует рассматривать как попытку разумного решения проблемы; их можно понять лишь как выражение боевого духа, для которого желаемая цель оправдывает принимаемые средства. Утверждение, что общины, в которых в течение 24 лет земля не перераспределялась, не являются более жизненными, ожидалось обществом менее всего, поскольку до тех пор усилия законодателя были направлены на удлинение промежутков времени между переделами, а закон 8 июня 1893 г. даже запретил более частое перераспределение, чем через 12 лет.

Кроме того. предпосылка о том, что общины, в которых длительное время не было общего перераспределения, не обладают более никакой жизненной силой, вовсе не соответствует действительности. Во многих случаях общины считали более подходящим добиваться той цели, к которой были направлены переделы, иными средствами, например, частичным взаимным обменом, который касался не всех членов зараз, а происходил по группам. Подобные частичные перераспределения были, правда, запрещены в 1893 г., но до того времени юридически разрешались, – и часто продолжали происходить даже впоследствии. Итак, было избрано правило для отличия “мертвых” общин от “живых”, никак не соответствующее своей цели и многие общины, в которых жизнь была на самом деле столь же энергична, как и в остальных, были таким образом причислены к “мертвым”.

По отношению к общинам второго разряда следует прежде всего отметить, что цена земли в России очень сильно возросла со времени освобождения крепостных. И поэтому указ, позволявший приобретать излишнюю землю, на которую покидавший общину не имел никаких разумных притязаний, – как сам декрет и признавал, – по старой цене, делал ему подарок за счет его односельчан. Покидавшему общину было оказано благоволение еще и другим способом: количество земли, получаемое им безвозмездно, не было вычислено должным образом.

Размер надела, который он получил бы при новом переделе, зависел не только от числа паев [например, от числа едоков], на которое он мог притязать, но и от величины пая. Но эта величина, устанавливаемая по числу претендующих, между которыми должна быть поделена полная площадь земель, изменяется со временем и фактически, как правило, понижается с ростом населения. И поэтому, при определении размеров безвозмездно получаемой земли, следует учитывать изменение и знаменателя, и числителя дроби, которая определяла пай покидающего общину, на момент последнего перераспределения. И таким образом указ позволял ему при выходе из общины получать одну часть земельного излишка (one portion of the extra land)[8], по существу не принадлежащего ему, по чрезвычайно низкой цене, а остальную землю – даром. И если даже быть склонным считать насильственное отчуждение имущества обязательным в тех случаях, когда оно благоприятствует более состоятельным членам общины за счет более бедных, эти установления нежелательны, потому что они столь несправедливо определяют оплату за отчуждаемую у общины землю.

Жесткость и несправедливость нового закона были сразу же разоблачены в прессе, но правительство отказалось внести в него исправления, – так много было поставлено на карту. Справедливость часто приносят в жертву политической целесообразности, которая начала настоятельно требовать быстрейшего разрушения общин, чего бы это ни стоило. Чтобы добиться этой цели было необходимо всеми способами благоволить покидающим общину членам и заставить придерживающихся общинной системы раскаяться в своем упрямстве. Ибо при беспристрастном обхождении с обеими сторонами следовало ожидать, что общины выдержат новую бурю подобно тому, как они раньше противостояли аналогичным нападениям.

5. Как объяснить неожиданное изменение мнения господствующих классов? Всего два года до того оно было склонно скорее поощрять общины, а не атаковать их. В 1893 г., как мы видели, общинам была дарована преувеличенная защита, чтобы спасти их от угрожавшего распада, а теперь всё сразу изменилось. Для разрушения общины используют все рычаги. Чтобы обойти обычный ход законодательного процесса, предписанный законом, издается императорский указ, направленный против общин, и чиновникам, выполняющим его, предписано принимать все меры к тому, чтобы новые положения не остались лишь на бумаге.

Административная машина работает под большим [политическим] давлением. Для чиновников, занятых этим, от губернаторов и ниже, отныне нет лучшей рекомендации, чем большое число семей, вышедших из общин. Применяя все законные, равно как и многие незаконные средства, всюду делаются усилия как можно быстрее увеличить эти числа. Что борьба против общин является осью, вокруг которой вращается наша внутренняя политика, открыто объявил Председатель Государственного Совета. Так что же произошло в указанном промежутке времени, вызвавшее эту лихорадочную реакцию? Произошли два события, из-за которых землевладельческая знать, в защиту которого выступило правительство, возненавидело общину и начало бояться ее, – крестьянское восстание 1905 – 1906 гг. и предложение аграрной реформы Первой Думой.

Крестьянские волнения не имели, правда, прямого отношения к общинам и происходили равным образом и в уездах, в которых их не знали. Но полагали, что существовала психологическая связь между общинной системой и требованиями к правительству, выставленными крестьянами, о наделении их достаточной землей за счет тех землевладельцев, которые не были крестьянами. Крестьяне, приученные к повторяющимся перераспределениям своей собственной земли в соответствии с нуждами различных семей, не могли составить себе никакого верного понятия о частной собственности и ее неприкосновенности. Они не могли усмотреть никакого различия между своими правами на землю, осуществляемыми в общине в ее пределах, и правами крупных землевладельцев на свои имения. То, чего они требовали, было по сути лишь распространением общинной системы на те соседние имения, которые ей сейчас неподвластны. Пока община существует, таким мнениям конца не будет.

И, чтобы истребить их с корнем, крестьян надо отучить от разделения своей земли. Как только они завладеют своей собственной землей, которую никто не сможет отнять у них, и которую они должны будут защищать как свою собственную от покушений извне, они научатся также уважать чужую собственность. Крестьянин-собственник может поддерживать существующий строй, но для этого он, правда, должен иметь достаточно земли, чтобы на ней можно было прокормиться, но в большинстве случаев крестьянских земель на всех недостаточно. Однако расслоение, которое приводит к образованию энергичного крестьянина с одной стороны, и неимущего пролетария с другой, основано на самой сути вещей. И поэтому, раз в политической битве, говоря словами Столыпина, надо ставить на сильного, необходимо лишь озаботиться тем, чтобы это расслоение поощрять, а не препятствовать ему как до сих пор, и тогда игра будет выиграна благодаря многочисленным энергичным крестьянам-собственникам, которые появятся на развалинах общин.

Вот, грубо говоря, краткая сводка мнений, которые постепенно укрепились в влиятельных кругах землевладельческого дворянства после начала крестьянских волнений. Но кроме того случилось, что Первая Дума усердной рукой набросала схему далеко идущей земельной реформы и высказалась в пользу обширного отчуждения земель, не находящихся у крестьян, и их распределения по общинам. Различные варианты реформы, представленные Думе, действительно указывали на [предусматривали] почти полное исчезновение крупных поместий. Общины имели существенное значение в большинстве этих вариантов, частично из-за расположения к ним, а частично по техническим причинам, поскольку было бы удобно обратиться к ним при пропорциональном распределении земли. И поэтому крупные землевладельцы начали вдвойне ненавидеть общины. Не будь общин, как они были склонны думать, все попытки обеспечить недостаточно наделенных землей за счет землевладельцев провалились бы.

Как только роспуск Первой Думы развязал руки министерству [внутренних дел], начался поход против общин. Начало положил Императорский указ 9 (22) ноября 1906 г., за которым последовал указ 15 (28) ноября 1906 г., который облегчил мобилизацию крестьянских земель. Издание этих указов было основано на статье 87 Основных законов, которая сохранила за царем право решать подобным образом неотложные вопросы, находящиеся в ведении Думы, во время перерывов в ее работе, с оговоркой, что подобные указы должны быть представлены Думе для одобрения в течение двух месяцев после возобновления ее заседаний. Недолго размышляли о том, что именно оправдывало в этом случае неотложность. Помимо желания поскорее отделаться от общин и стремления поставить Думу, которая несомненно не одобрила бы правительственные проекты, перед свершившимся фактом, не было абсолютно никаких иных причин, почему разрешение этой трудной проблемы, уже затянувшееся на многие годы, нельзя было бы отложить до созыва [следующей] Думы.

Оба указа были представлены Второй Думе. Большинство депутатов, занимавшихся разработкой земельной реформы такого же рода, как и в Первой Думе, были против них. Но до того, как эти указы были официально отклонены, эта дума была также распущена и указы остались на время в силе. Хорошо известно, что после роспуска Второй Думы порядок выборов в думу был изменен государственным переворотом 3 (16) июня 1907 г., и землевладельческая знать получила в ней преобладающее влияние. Тем самым была создана дума, которая по земельному вопросу придерживалась взглядов, аналогичных правительственным и шла почти еще дальше в своей ненависти к общине. Ноябрьские 1906 г. указы были представлены также и Третьей Думе и на этот раз они обсуждались, притом очень долго. Меры против общин, придуманные правительством, были не только одобрены большинством депутатов, но частично ужесточены.

Затем законопроект, составленный думой, был представлен в Государственный Совет, и схватка возобновилась. Центру, представлявшему взгляды правительства, в нем противостояли правые и левые, которые [частично] состояли из представителей университетов. Фракции были почти равны, но в конце концов, хотя только после нескольких месяцев борьбы и с помощью голосов министров, все основные положения указа 9 (22) ноября 1906 г. были приняты. Важнейшей поправкой оказалось изменение границы между “умершими” и еще действующими общинами. К первому разряду следовало теперь относить только те, в которых общего перераспределения не было с момента их наделения землей. Законопроект, исправленный верхней палатой, должен был быть снова представлен Думе и поэтому временные установления указа 9 (22) ноября 1906 г., фактически действовавшие 3½ года, стали законом лишь 14 (27) июня 1910 г. , когда законопроект, составленный Думой и Государственным Советом, был одобрен царем.

6. С тех пор, как положения этого указа вошли в силу, прошло пять лет [1907 – 1911]. Каков же был их результат? Внешне он впечатляет. По оценкам официальной статистики до 1 января 1912 г. более двух миллионов семей выразили желание воспользоваться преимуществами этих положений, а полтора миллиона, владеющие 12 миллионами десятин, действительно покинули общины. Есть такие уезды, в которых общинную систему следует теперь считать заброшенной. Преимущества тех, кто покидает общину, так велики, что это можно легко понять: слишком большая моральная твердость понадобилась бы для сопротивления соблазну. Представим себе, что в какой-то момент был принят закон, позволяющий не отдавать карточные долги или не платить по обязательствам, происшедшим при игре на бирже. Чувство чести наверняка не позволило бы многим [некоторым] должникам воспользоваться этим позволением, поскольку помимо [отмененных] юридических мер общественное мнение также оказывает определенное давление. Но многие ли должники поступили бы так?

Указ 9 (22) ноября 1906 г. поставил членов сельских общин в точности подобное же положение. Члены общины взаимно обязуются после определенного промежутка времени делить землю поровну (equally), притом заранее неизвестно, кто из них выиграет, а кто проиграет. Но чем ближе подходит срок подсчетов, тем очевиднее становится каждому, кому придется *платить по счету*. И в этот момент появляется законодатель и говорит проигрывающим: если будете послушны и навсегда отречетесь от ненавидимой мной общины, то сможете сохранить землю, которую иначе вам придется отдать. Нужно ли удивляться, что подобные увещевания оказываются действенными? Не следует ли скорее поражаться, что во многих уездах [губерниях] воспротивились подрывающему влиянию подобного закона? Так, в Архангельской губернии, в которой по статистической оценке 1905 г. было более 50 тысяч хозяйств, принадлежащих общинам, ни один человек не заявил о своем выходе. В других северных и северо-восточных губерниях число покидающих общину очень невелико.

Подробное исследование числовых данных к сожалению затруднительно ввиду отсутствия точных сведений. Официальные публикации пристрастны, а потому и не заслуживают доверия. Более того, они очень скудны и в некоторой степени беспорядочны в отношении группировок цифр, правительство же противится любой попытке прояснить дело по неофициальным источникам. Борьба против общины считается политической, и принимаются все меры, чтобы не подпускать ее противников к материалам, необходимым для сопротивления правительству. Но происходящее в деревне разрушение настолько обширно, что многое обнаруживается несмотря ни на что.

При ответе на вопрос, кто из крестьян воспользовался указом, можно разбить [большинство] покидающих общину на две основные группы. Это, во-первых, те, на которых его положения были непосредственно направлены, – которые должны были бы при следующем перераспределении земли лишиться ее части и которые могут теперь сохранить ее за собой. И, во-вторых, это те члены общины, которые были отдалены от своей родной земли, – промышленные рабочие, проживающие вдалеке от дома и сдающие выделенную им землю в аренду или даже оставляющие ее под паром; переселенцы, которые намереваются уехать на Дальний Восток, и пр. Эта группа покидает общину, чтобы продать свою землю (сделка, при которой их обычно обманывают) и с выгодой вложить полученные деньги в другом месте. Но есть и разоренные крестьяне, которые нетерпеливо пользуются случаем обратить свои права членов общины в деньги и сразу же истратить их, не думая о будущем.

Число тех, кто покидает общину, хотя и не опасается сокращения своего надела при перераспределении земли, незначительно. На некоторых из них влияет непрочность положения остающихся в общине, вызванная беспрестанным выходом из нее, другие, правда, руководствуются сознательным предпочтением частной собственности перед общинной системой, но таких очень мало. Об этом свидетельствует тот факт, что покидающие общину очень редко, несмотря на оказываемое на них давление и на многочисленные сопутствующие преимущества, пользуются предоставляемой им возможностью получить свою землю в едином участке [?]. Полное число тех, кто до 1 июня 1910 г. получил землю в едином участке, не достигало 50 тысяч, что едва составляло 3.8% тех хозяйств, которые фактически покинули общину. Во многих губерниях это число настолько незначительно, что выражается лишь долей процента. Более того, для морального поведения покидающих общину характерно, что возникли случаи, когда они требовали землю на родившихся впоследствии детей[9]. В закон 14 (27) июня 1910 г. была поэтому введена статья, прямо указывающая, что покидающий общину [тем самым] отказывается от всех последующих притязаний.

Ожидание, что новый закон приведет к появлению слоя надежно стоящих на ногах крестьян-собственников, который политически примкнет к землевладельческой знати и образует охранение, которое воспротивится крестьянским нападениям с их лозунгом “Больше земли!” сбылось в общем настолько слабо, что усердие, проявленное в борьбе против общин, в последнее время как будто заметно ослабло. Этому постепенно набирающему силу следствию способствует то, что и другие надежды, связанные с роспуском общин, оправдались лишь в малой степени, и то, что одновременно выявилось многое, заставляющее серьезно задуматься над результатами столь поспешных шагов.

Всегда утверждалось, что роспуск общин облегчит путь для сельскохозяйственного прогресса, – таково было характерное утверждение тех защитников государственной политики, которым было неловко открыто поддерживать политическую сторону дела. Думали даже оправдать переход к частной собственности случайно расположенных полосок земли (см. § 4 [и Прим. 1]), что было разрешено для облегчения роспуска общин. Говорили, что последующее невыносимое положение заставит объединять участки, в противном же случае эта мера надолго задержалась бы и что таким образом указанное разрешение послужит техническим улучшениям.

Но что произошло? Невыносимое положение появилось, но в большинстве случаев оно и сохранилось, потому что второй предположенный шаг, т. е. объединение полосок, не последовал. Существующее положение, правда, не исключает технического прогресса. В настоящее время во многих уездах крестьяне добились успехов, внушающих удовлетворение. За годами политических возмущений и сельскохозяйственных волнений последовала сильная психологическая реакция. Сильное возбуждение того времени до глубины души возбудило сонное крестьянство, и теперь сельскохозяйственные работы извлекают пользу от разбуженной энергии. Свидетельством тому недавние успехи кооперации в России и усердие, с которым воспринимается обучение методам ведения сельского хозяйства. Не будь помех, чинимых обучению реакционерами, руководящими администрацией [министерства] внутренних дел, своим незнанием дела, быстрое улучшение сельского хозяйства можно было бы, как представляется, считать обеспеченным.

Но указ 9 (22) ноября 1906 г. не заслуживает в этом отношении никакой похвалы. Напротив, так много [частнособственнических] полосок земли, принадлежащих бывшим членам общин, теперь разбросаны по общинным полям, что улучшать методы сельского хозяйства оказалось намного труднее. Положительного в этом декрете немного как с экономической, так и с политической точки зрения, зато можно указать в нем серьезные недостатки. Во-первых, следует отметить раздражение и взаимную ненависть, возбужденные у крестьян. Несправедливость по отношению к более бедным членам общины со стороны тех, кто был лучше наделен землей и покидал общину, вызванная условиями, определенными в указе, возбудила горечь, которая усиливается односторонним пристрастием чиновников к “сильным”. При случае чиновники не чураются вмешиваться [в крестьянскую жизнь]. Известно, например, что во многих уездах более влиятельные противники указа были арестованы и изгнаны [сосланы?] (expelled).

Покидающие общину всеобще ненавидимы. Прежде всего стараются всеми мыслимыми усилиями предотвратить их уход, а их последующую жизнь делают столь неприятной, что спустя некоторое время они могут даже проситься обратно. Насилие всякого рода, поджоги и пр. стали обычными, и пройдет немало времени, прежде чем раздражение ослабнет. Это положение можно, правда, считать политически удовлетворительным, потому что крестьянская масса разделилась и несомненно, что внутренние раздоры сломили их силу сопротивления землевладельцам. Но мы вряд ли можем похвалить поборников действий правительства за подобную макиавеллиевую политику разделять и властвовать.

Для государственного деятеля, не полностью ослепленного классовыми интересами, одно это следствие указа достаточно. чтобы сожалеть о содеянном. Но следует принять во внимание еще нечто. Расслоение крестьянства ставит на одну сторону сильных, на другую – массу слабых. И тех, и других надо изучить до того, как выносить окончательное суждение. По отношению к тем [из последних], кто остался в общине, сразу же ясно, что они ничего не заимели от указа, потому что лишились части своей земли, а пользование оставшейся частью для них к тому же нарушилось. К разряду слабых относятся и хозяйства, которые покинули общину, а затем продали свою землю. К сожалению, имеющиеся об этом статистические свидетельства особенно неудовлетворительны. Но те сведения, которыми мы располагаем, подводят нас к предположению, что число таких хозяйств весьма значительно, хоть годы после того, как указ вступил в силу и были весьма благоприятны для сельского хозяйства; урожаи оказались хорошими, а в некоторых случаях очень хорошими. Правда, конечно, что с уходом с земли, полученной от общины, не следует финансового разорения всех покинувших общину. Но даже учитывая это, нельзя отрицать, что борьба с общинами уже намного уплотнила ряды неимущего пролетариата и в будущем уплотнит их еще больше. Стоит только подумать о неурожаях, во время которых возможность получить деньги продажей земли приведет к многочисленному исходу из общин.

И где же смогут найти себе занятие большое число людей, которые таким образом добавятся к пролетариату, коль скоро промышленность в России недоразвита. Правительство теперь, правда, пытается поощрить переселение в Сибирь и Среднюю Азию, но возможности принять переселенцев на азиатской части России ограничены. В 1909 г. было достигнуто наибольшее число переселенцев, 600 тысяч, но в следующем году оно снизилось вдвое, а в 1911 г. оказалось еще меньшим. Но какое значение имеют даже 600 тысяч по сравнению с миллионами, о которых идет речь? Положение становится еще более опасным, потому что в стране нет упорядоченной системы помощи бедноте. В прошлом по отношению к большей части населения помощь зависела от общин. Даже для промышленных рабочих они оказывались прибежищем при безработице и в старости, теперь же всё это должно быть резко изменено. Узы общинной системы разрезаны, но заменить их чем-нибудь другим позабыли. В нервной горячке, с которой по политическим причинам решили разрушить общины, для обдумывания подобных вопросов времени не было, теперь, однако, постепенно дает о себе знать раздумье.

Страна начинает представлять себе, что дела идут неправильно и можно только надеяться, что неизбежная реакция не будет откладываться слишком надолго и что, когда она произойдет, не будет слишком ожесточенной и не пойдет дальше, чем необходимо для исправления уже происшедшего.

Примечания

1. Члены общины получали участки пашни в 20 – 30 местах, чтобы уравнять положение, поскольку земли весьма различны. Есть ближние и дальние, увлаженные и сухие, ровные и склоновые и т. д. Л. Ш.

2. Тонтиной (по имени неаполитанского банкира Лоренцо Тонти) называлась форма взаимного страхования, при которой группа состоятельных людей покупала для себя у государства пожизненную ренту и распределяла поступающие ежегодные платежи между своими членами, еще остающимися в живых. Доживавшим до преклонного возраста доставались весьма значительные суммы. О. Ш.

3. Подворное землевладение? (*Besitz* может означать и владение, и собственность.) Оно, однако, не имело места у бывших служилых людей, так называемых однодворцев, у которых вообще не было общин. Л. Ш.

4. Принудительный севооборот был распространен повсеместно для удобства пастьбы скота. Л. Ш.

5. Осмелюсь отослать тех, кто желает подробнее ознакомиться с эволюцией общины, к моему исследованию (1902). *Чупров*

6. Скот был важен и для унавоживания пашни. И всё-таки лошадей, видимо, следовало упомянуть отдельно. Л. Ш.

7. Причитающаяся земля выделялась единым *отрубом*. Л. Ш.

8. По смыслу всё-таки *получать весь излишек*. О. Ш.

9. Так было всегда. Л. Ш.

Библиография

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926).* Берлин. Также www.sheynin.de

Елисеева И. И., Дмитриев А. Л., Сторчевой М. А., редакторы (1996), *А. А. Чупров. Материалы конференции к 70-летию со дня кончины*. СПб.

Кочаровский К. Р. (1925), Выходы из общины. *Записки Института изучения России* (Прага), вып. 1, с. 45 – 101.

Орлов А. В. (1996), Общественная деятельность А. А. Чупрова в защиту малоземельного крестьянства в период 1906 – 1910 гг. В книге Елисеева и др. (1996, с. 37 – 40).

Розенберг Вл. А. (1926), Несколько биографических черт [А. А. Чупрова]. *Русск. экономич. сб.*, № 6, с. 5 – 15. Перепечатка: Шейнин (2007, с. 116 – 127).

Струве П., Лаппо-Данилевский А., Дьяконов М. (1996), Записка об ученых трудах профессора А. А. Чупрова. Написано в 1917 г. В книге Елисеева и др. (1996, с. 56 – 59).

Чупров А. А., Tschuprow A. A. (1902), *Die Feldgemeinschaft*. Strassburg.

Шейнин О. Б. (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка*. М.

---, составитель и переводчик (2007), *Четвертая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также www.sheynin.de

K. [Keynes] J. M. (1926), Professor A. A. Tschuprow. *Economic Journal*, vol. 36, pp. 517 – 518. Перепечатка в собрании сочинений автора: *Collected Works*, vol. 10. Cambridge, 1972, pp. 321 – 322. Перевод: Шейнин (2007, с. 181).

Земельный вопрос через сто лет

Л. Б. Шейнин

Чупров не перечислил всех трудностей, связанных с выходом из общины. Так, получение отруба, часто отдаленного от существующего поселения, требовало переноса туда крестьянского двора, т. е. создания хутора, а если к нему не было дороги, то ее надо было еще проложить, а в зимнее время (притом в любом случае) очищать от снега. Весь отруб или его часть надо было огораживать, чтобы не уходил свой скот и чтобы не было потравы со стороны общественного стада. При переселении затруднялась связь с родными и со школой, а также взаимопомощь, а еще при выделении отруба были неизбежны расчеты *количества за качество* и наоборот, но при неразвитости земельных оценок и расчетов неизменно происходили споры и конфликты. Недаром Столыпин предусмотрел, чтобы все такие споры решались в землеустроительных комиссиях, без переноса в суд.

По опыту других стран, в которых общинная собственность на землю была разрушена и созданы крестьянские хутора, этот процесс занимал десятилетия (в Польше – по крайней мере лет 50 в XIX – XX в.), а нетерпеливый Столыпин пытался закончить его в считанные годы; понятно, что получилось плохо.

После Октября 1917 г. произошел новый земельный передел, который включил в крестьянские наделы бывшие помещичьи земли, а также и все успевшие к тому времени сформироваться частнособственнические крестьянские участки. Известно, что все земли были тогда объявлены “народным достоянием”, но вскоре – государственной собственностью.

Предложение Чупрова относительно долевой собственности на землю сбылось в современной России. В 1990-х годах земли колхозов и совхозов были “расписаны” между их работниками и некоторыми кругами сельских специалистов таким образом, что каждому управомоченному лицу было выдано свидетельство на право собственности на некоторое количество (долю) сельскохозяйственных земель в определенном хозяйстве. За каждым таким лицом был закреплен также пай в стоимости строений, машин, скота и других активов этого хозяйства. Часть колхозов и совхозов, переживших процесс первоначального разорения, продолжает сельскохозяйственное производство; формально они превратились в акционерные общества. Фактически многие из них имеют черты земельных кооперативов, так как “акционеры” суть работники своих же хозяйств; руководители таких хозяйств выборные.

Некоторые хозяйства имеют свободные земли, которые сдают в аренду фермерам-предпринимателям, но чаще на эти земли притязают местные владельцы земельных долей для расширения своих так наз. личных подсобных хозяйств (ЛПХ), центрами которых служат их приусадебные участки. Последние постепенно расширяются до размеров причитающихся владельцам земельных долей и можно ожидать, что со временем часть владельцев ЛПХ превратится в *нормальных* фермеров.

Имеются случаи, когда крупный предприниматель или компания скупает земельные доли, обнимающие весь массив земель сельскохозяйственного предприятия. Тогда это предприятие (если у новых собственников нет намерений застроить землю) превращается в частное и крупное хозяйство сохраняется.

Вместе с тем, перспективы действующих сельскохозяйственных акционерных обществ нельзя назвать радужными. По действующему законодательству, владелец земельной доли может всегда потребовать выделить причитающуюся ему землю в натуре и тем самым *оторвать* ее от общего массива. Крупное предприятие поэтому не может рассчитывать на постоянство своих земельных границ, а это не позволяет ему нормально развиваться. Дело в том, что его постройки, машинный парк, поголовье его продуктивных и непродуктивных стад зависят от размеров его земельной площади, которые к тому же определяют его потребность в кадрах. Но поскольку хозяйство не может быть уверено в своих землях, все его планы оказываются условными и рискованными. Как можно поправить это положение ?

Одну из смягчающих мер указало еще аграрное столыпинское законодательство: требование управомоченного лица о выделении ему земли (отруба) в частную собственность может предъявляться не в любой момент и не при любых обстоятельствах. По-видимому, в наше время, такое требование должно выдвигаться заранее, возможно –за 2 – 3 года до момента фактической нарезки нового владения. Если владелец выделяемого участка желает продать его на сторону, то преимущественное право покупки должно иметь то предприятие, из состава которого он выделяется. Возможно, предприятиям акционерного типа целесообразно официально переходить в сельскохозяйственные кооперативы, как это предлагает заслуженный юрист аграрник Жариков (2005). В этом случае они могли бы заключать с владельцами земельных долей, – земельными вкладчиками, – договоры, ограничивающие право последних изымать из товариществ свои доли.

Возможен иной механизм, также повышающий устойчивость нынешних сельскохозяйственных предприятий. Некоторые из них обладают излишками земельных площадей, так что использование каких-то принадлежащих им участков оказывается для них менее эффективным, чем в малом или среднем хозяйстве. Поэтому, если предполагаемая совокупность требований "акционеров" о выделе их земельных долей из общего массива не сможет разрушить крупное предприятие, оно могло бы заранее подготовить участки, предназначенные для удовлетворения требований отдельных земельных дольщиков и их групп. Понятно, что такое мероприятие требует глубокой землеустроительной подготовки. К сожалению, в настоящее время оно невозможно, ибо после ряда реорганизаций государственных земельных органов Министерство сельского хозяйства лишилось своего землеустроительного аппарата. Его нет и на региональном уровне и потому начинать надо с возрождения именно этого аппарата, способного решать задачи сельскохозяйственного производства.

Уместно вспомнить, что землеустроители во времена Столыпина недаром сменили землемеров предыдущих десятилетий и вдобавок к измерению площадей существующих хозяйств и определению их границ устанавливали и выносили в натуру положение и конфигурацию их земель. Для решения именно таких задач должна возродиться землеустроительная служба в современной России.

Жариков Ю. Г. (2005), Дискуссионные вопросы земельных правоотношений. В сборнике *Правовое обеспечение развития сельского хозяйства России*. М., с. 230 – 250.

Мировой рынок после войны

Современные записки № 13, 1922, с. 191 – 213

1. Мировой рынок, мировое хозяйство! Сложившиеся до войны понятия прочно держатся в нашем обиходе. Но многие ли из тех, кто продолжает пользоваться ими, дают себе ясный отчет, в какой мере изменились за эти недолгие годы те реальные явления, которые ими покрываются? Перед войной можно было вести речь о мировом рынке, как о чем-то существующем в жизни, а не только в воображении умствующих о жизни экономистов. Можно было говорить о мировом производстве и о мировом потреблении не как об арифметических суммах, подсчитываемых на бумаге досужими статистиками, а как о подлинных итогах, подводимых “мировым хозяйством”.

Пшеница, собираемая в Соед. Штатах и на русском черноземе, в Аргентине и в Канаде составляла запас, из которого невозбранно черпали и свои и чужие, из которого продовольствовалось население и Англии, и Германии, и Италии, и других стран. Хлопок, выращиваемый в Соед. Штатах, распределялся между прядильнями Ланкашира и текстильными районами Германии на условиях, мало отличных от тех, на каких он поставлялся отечественным мануфактуристам. Малейшие колебания в цене хлопка или пшеницы в Нью-Йорке сказывались тотчас в Ливерпуле и в Бремене, на лондонской и на берлинской биржах. Даже для таких товаров, которые находились в исключительном обладании одной какой либо страны, но требовались повсюду, мировое хозяйственное общение устанавливало единство рынка. Германия имела естественную монополию на калийные соли; Германия располагала культурными монополиями в области производства красок и лекарств. Это ощутительно сказывалось на образовании цен, на уровне и на колебаниях их, но сказывалось на ценах и вне и внутри Германии.

Правда, и до войны мировой рынок в том смысле, в каком может о нем идти речь для пшеницы, для хлопка, для меди и т. д., существовал далеко не для всех товаров. Не все были в такой мере вовлечены в мировой товарооборот; между национальными рынками многих товаров не было такого постоянного и свободного от трений сообщения. Если уровень цен на хлопок в Ливерпуле и в Нью-Йорке выравнивался с той же легкостью, с какой устанавливается общий уровень воды в двух хорошо сообщающихся сосудах, то для иных товаров ближе подходящим образом была бы сильно вязкая жидкость в сосудах, сообщающихся узким каналом. Связь между ценами была для них не такая тесная и не столь мгновенная: сравнительно подолгу могли держаться, не выравниваясь, довольно значительные различия уровней.
Таким образом, и перед войной о мировом рынке можно было, собственно, говорить лишь с некоторой оглядкой, – оговариваясь, что, поскольку речь идет не о таких товарах, как пшеница, хлопок и им подобные, следует брать термин в несколько условном смысле, – разуметь не столько достигнутое уже состояние мирового хозяйства, сколько тот предел, к которому устремлено развитие.

Война разбила мировой рынок: нарушилась связь между ценами в отдельных странах; прервался свободный перелив товаров из страны в страну. Мировой рынок распался; на его место стали национальные рынки, оторвавшиеся друг от друга так, что в некоторых отношениях разобщенность их стала мало уступать временам до парового транспорта. Замерла не только торговля между враждующими державами. Изменил свой характер и товарообмен с нейтральными, даже с союзными странами. Забота о том, чтоб внутренний рынок не остался без товара, выдвинулась повсюду на первое место. Внешний товарообмен был поставлен под присмотр государства, а то так даже стал осуществляться самим государством.

До войны государственная власть оказывала воздействие лишь на общее направление внешней торговли посредством ставок таможенного тарифа, самое же осуществление торговых сделок всецело предоставлялось усмотрению импортеров и экспортеров. Теперь круг ее полномочий существенно расширился и начал охватывать чисто коммерческие задачи. Сколько какого товара сбыть заграницу, куда и по каким ценам; сколько чего ввезти из заграницы, откуда и на каких условиях, – попечение об этом лежало до войны на отдельных торговцах, действовавших на свой личный страх и руководствовавшихся одним расчетом: закупать, где дешевле, – продавать, где цены выше. Благодаря этому цены и выравнивались повсеместно, устанавливался на мировом рынке общий их уровень, уклонения от которого, как правило, не превышали существенно издержек перевозки и ввозных пошлин (вывозных пошлин двадцатый век до войны, можно сказать, не знал). За годы войны строй внешней торговли подвергся коренной перемене. Быстро обострявшееся безтоварье заставляло держать запасы на учете, расходовать их бережно, следить, чтоб товар не уходил из страны иначе, как в обмен на то, что являлось еще более нужным. Даже золото некоторые страны уклонялись принимать в обмен на свои товары, – Швеция признала, например, необходимым изменить свой Монетный Устав, дабы затруднить оплату заграничным золотом вывозимых из Швеции товаров. Сплошь и рядом правительства начали вступать в прямые соглашения касательно того, сколько какого товара будет дозволено вывезти из одной страны в другую, – Германия соглашалась, например, разрешить вывоз определенного количества угля в Швейцарию под условием, что из Швейцарии поступят въ Германию договоренные количества нужных для Германии швейцарских товаров.

За соблюдением таких соглашений был установлен строгий надзор, созданы были ради этого сложные организации. И независимо от межгосударственных соглашений ввоз и вывоз подвергались нередко “контигентировке”, – т. е. допускались лишь в намеченных наперед количествах: как только вывоз доходил до установленного предела и “контингент исчерпывался”, экспорт на время приостанавливался. Вообще вся внешняя торговля была взята под государственную опеку. На вывоз, на ввоз стало обязательным испрашивать правительственные разрешения,–

выправлять ввозные и вывозные “лицензии”. Самые условия**,** на которых товар покупался и продавался, начали при этом подвергаться рассмотрению в выдававших лицензии учреждениях и даже прямо предписываться ими в соответствии с общей линией правительственной политики.

В направлении политики обнаруживались немалые различия между разными странами и по отношению к разным товарам, а нередко и для одного и того же товара в одной и той же стране. Это вносило сильнейшую неуверенность в торговый оборот. Объяснялась же неустойчивость политики тем, что здесь сложно переплетались противоречивые интересы, – общенародные и частные. Из-за направления политики шла все время напряженная борьба.

Стремление поднять ввоз ради лучшего снабжения внутреннего рынка сталкивалось с заботами о валюте, побуждавшими урезывать всемерно заграничные платежи. Усиливать же вывоз в интересах валюты и ради поддержания отечественной промышленности мешали опасения обострить безтоварье на внутреннем рынке: пожелания экспортной промышленности и занятых в ней рабочих сталкивались с требованиями широких кругов потребителей. Явственный расчет побуждал вводить в границы взаимную конкуренцию отечественных экспортеров и импортеров на внешних рынках, поскольку не сдерживали ее частные между ними соглашения. В этих видах воспрещалось, например, продавать за границу по ценам, ниже указанных властью; из валютных соображений предписывалось иногда назначать цены не в отечественной валюте, а в деньгах страны сбыта. С другой стороны, ради того, чтоб воспрепятствовать импортерам набивать друг перед другом цены, устанавливался предел, выше которого не разрешалось расценивать привозной товар, выпускаемый на внутренний рынок. К этому, помимо прочего, побуждало стремление ввести привозной товар в рамки общего плана снабжения страны в связи с постепенным переходом европейских стран к принудительному выравниванию потребления путем выдачи пайков и к государственной регулировке цен внутреннего рынка, – к широкой замене “вольных” цен на нем “указными”.

Здесь не место всматриваться в те причудливые узоры, в которые сплетались эти пестрые нити в сложной ткани правительственных распоряжений в разных странах за годы войны. Для наших целей существенно лишь отметить, что под действием совокупности этих мотивов повсеместно – где в большей, где в меньшей мере; где раньше, где несколько позже – исчезла былая свобода внешней торговли. Пресекся беспрепятственный ток товаров через границы. А вместе с тем перестал существовать мировой рынок: он рассыпался на почти не связанные между собой национальные рынки, цены на которых начали определяться своими условиями, – местным спросом и местным предложением и характером правительственных мероприятий. Цены даже пограничных государств перестали давить друг на друга так непосредственно, как в довоенную пору; они начали расходиться вне всякого соответствия со стоимостью транспорта. Стали в широких размерах независимыми друг от друга и колебания цен. От единого уровня цен мирового рынка не осталось и подобия.

По окончании войны преграды, воздвигнутые на границах, начали понемногу сниматься. Начал намечаться постепенный возврат к былому строю мировой торговли. Но движение на этом пути идет не быстро. Некоторые из видных участников мирового товарообмена, – например, Германия, – и посейчас не считают возможным обойтись без мер самого придирчивого государственного контроля над ввозом и вывозом. Да и там, где имелись возможность и охота порвать решительнее с порядками "военного хозяйства", отказались от них все же не сразу, – не без борьбы и не без колебаний. Пережитки окрепшей за войну привычки к государственной опеке над хозяйственной жизнью продолжают держаться почти повсюду – где в более, где в менее ярко выраженных формах, – и до восстановления свободного мирового рынка даже в конце 1922 г. – через четыре года по прекращении военных действий – все еще далеко.

2. К действию стеснений свободы внешнего товарообмена, тормозящих развитие мировой торговли, присоединяется валютный развал, донельзя осложняющий хозяйственное общение между странами с разными денежными единицами, делающий его порой почти невозможным. До войны различие денежных единиц не сказывалось заметным усложнением торгового оборота: необходимость пересчитывать марки в рубли или фунты в доллары затрудняла хозяйственное общение не многим более, нежели переход от пудов к килограммам или от метров к аршинам и ярдам.

В странах, являвшихся руководящими участниками мирового хозяйственного общения, денежные единицы были прислонены к золоту, и этим обеспечивалось устойчивое соотношение между ними: колебания в их взаимных расценках, за редкими исключениями, не выходили из пределов так наз. "золотых точек", – из тех границ, при уклонении за которые появлялся расчет перевозить золото из одной страны в другую. Для важнейшего из рынков, державшихся за серебро, – для Британской Индии с ее 300-миллионным населением, – удалось, после ряда попыток, установить в более сложном порядке денежную систему, которая с почти той же степенью точности обеспечивала от резких колебаний курс рупии в Лондоне и курс фунта стерлингов в Индии. Таким образом, при построении расчетов в хозяйственном обороте – в частности, при калькуляции цен – можно было почти не заботиться о том, что покупатель считает в иных денежных единицах, нежели продавец.

Так было до войны. Не то сейчас. Ни одной из стран, где денежное обращение оторвалось за годы войны отъ золотой основы, не удалось еще восстановить его нормального строя. В Швейцарии золотая монета появилась фактически в обращении, но юридически размен бумажек на золото не сделан еще обязательным. Высокий курс шведской кроны почти позволял бы вернуться к золотому обращению; однако, и Швеция не решается на этот шаг и с месяца на месяц откладывает введение в силу обязательного для Государственного банка размена на золото выпускаемых им в обращение бумажек. Повсюду бездействуют, таким образом, те сдержки, которые в былые времена вводили автоматически колебания валют в пределы “золотых точек”. Нигде не создано им и замены в форме систематических забот государственной власти об удержании курса на более или менее устойчивой высоте. Техническая возможность добиться валютного равновесия без восстановления золотого обращения не только допускается теоретической мыслью, но и доказуется жизненным опытом.

За примерами недалеко ходить: в течение ряда лет державы согласия [Антанта] удерживали на твердо устойчивых уровнях расценку своих валют на доллары, а вместе с тем и взаимные между ними соотношения. Это требовало, однако, такого напряжения, которое оправдывалось, пока стоял на карте исход войны, но стало не под силу, когда война пришла к концу. В средине марта 1919 г. правительственная поддержка курсов в Нью-Йорке была прекращена, и тотчас же валюты пошли вразброд: фунт стерлингов, который перед тем поддерживался в Нью-Йорке на высоте примерно в 4,76 долларов (при паритете в 4,86 2/3 долл.), спускается сразу до 4,56, затем оправляется до 4,66 и довольно устойчиво держится некоторое время около этого уровня. Но с лета 1919 г. начинает неудержимо скользить вниз, спускаясь к средине декабря до расценки в 3,67 долл. После некоторого повышения к концу года, курс фунта стерлингов в 1920 году еще стремительнее падает: 4 февраля достигается низшая точка, – отмечаются сделки по 3,20 и даже на 3/4 цента ниже. Затем наступает перелом, и в течение немногих недель курс оправляется почти до 4 долларов за фунт. Сходные, но еще более резкие колебания обнаруживает французский франк после того, как отпадает искусственная поддержка его курса.

Английский фунт и даже французский франк принадлежат, однако, к числу сравнительно “благородных” валют; степень их обесценения и размах их колебаний даже в наихудшие периоды – ничто по сравнению с действительно разбитыми валютами. Рекордное для фунта понижение по сравнению с долларом, – 1/3; рекордное обесценение французского франка по сравнению с долларом несколько превышает 2/3, по сравнению с фунтом не достигает 2/3. Германская же марка, при паритете в 20,43 марок за фунт стерлингов, спускается в начале июля 1922 г. ниже 2000 марок за фунт, а в начале ноября 1922 г. падает ниже 3000 марок за фунт. Австрийская крона (паритет 24,02 кроны за фунт) переходит в конце августа 1922 г. расценку в четыреста тысяч крон за фунт. О советском рубле нечего и говорить.

Резкие скачки валют вверх и вниз делают невозможным правильный расчет в международной торговле, тем более что ни размера, ни хотя бы направления их часто не предусмотришь даже для недалекого будущего. Промышленник и торговец не в состоянии спокойно назначать свои цены; колебания курса сбивают самую осторожную калькуляцию. Против воли всякий, кто принимает участие в международном торговом обороте, становится спекулянтом на валюте. Спекуляция же на валюте, – дело, всегда рискованное, – сопряжена с несообразными рисками для тех, кто вынужден заниматься ей попутно, не имея к ней ни влечения, ни навыка. Обычная торговая прибыль не идет ни в какое сравнение с тем, как сказываются на результатах сделок колебания курсов. При продаже и при покупке в чужой валюте не учтешь в таких условиях наперед, останешься ли в накладе или получишь ни с чем не соразмерный барыш: скачок валюты вверх, движение ее вниз могут озолотить, могут и разорить, – равно неожиданно, равно без вины и без заслуги. А так как при каждой сделке в международном товарообмене одна, по крайности, сторона заключает ее в чужой валюте, то международный товарообмен и приобретает в после-военное время характер азартной игры.

Это отпугивает от участия в нем солидных представителей промышленности и торговли и поддерживает разобщенность рынков, не давая утвердиться прочной связи между ними. Недаром установление золотого обращения в странах, стоящих в тесном хозяйственном общении, уподобляют перешивке их железнодорожной сети на общую колею. Мы видим ныне яснее, чем когда-либо, до чего затрудняется переход товаров через границы отрывом денежных единиц от общей “золотой колеи”.

Биржевая техника знает, правда, возможность освободить от несения спекулятивных рисков тех участников оборота, которые предпочитают небольшую солидную прибыль неверному шансу крупного выигрыша. Механизм сделок на срок позволяет перекладывать спекулятивные риски на специалистов-любителей, которые делают из биржевой игры, построенной на учете будущих цен, свою профессию. Поскольку ланкаширский мануфактурист, запродающий свои изделия в Индию, располагает возможностью продать немедля на бирже рупии, причитающиеся со временем к получению по известному ему курсу дня, риск понижения рупии снимается с него, и для него отпадают те препятствия к правильной калькуляции цен и к солидному ведению дела, которые сопряжены с работой на внешний рынок в современной обстановке валютнаго хаоса. Однако, организация торговли валютами на срок представляет, в свою очередь, чрезвычайную трудность в современных условиях: колебания так причудливы и так велики, что трудно подыскать плечи, достаточно мощные, чтоб принять на себя и выдержать риск. В связи с этим биржевой механизм валютных сделок на срок плохо налаживается: он начал воссоздаваться в сколько-нибудь серьезных размерах лишь в самое последнее время и, как ни существенно вносимое им облегчение международных торговых сношений, решить задачу в корне он пока не в состоянии.

При изучении характерных особенностей современного мирового рынка приходится считаться с неустойчивостью валюты и в другом отношении: ей не только тормозится товарообмен, но также нарушается согласованность в движениях цен в разных странах. Колебания валюты определяются в каждой стране своими причинами и не совпадают для разных стран ни по темпу, ни даже часто по направлению, – германская марка падает в то время, как английский фунт идет вверх; норвежская крона понижается, тогда как шведская крона дорожает.

В силу этого даже для таких товаров, как пшеница, хлопок, каучук и т. д. движение цен в разных странах может складываться по-своему, несмотря на то, что для них восстановилось былое единство мирового запаса, из которого черпают все страны-потребительницы: хлопок может дешеветь в Нью-Йорке или в Ливерпуле и в то же время дорожать в Бремене вследствие того, что за доллар или за английский фунт приходится платить больше германских марок. Каучук сильно подешевел в Лондоне против довоенного времени: в январе 1914 г. фунт каучука стоил там 2 шилл. 3 пенса, а в июне 1922 г. за фунт каучука платили лишь 8 пенсов, – почти в три с половиной раза меньше. В Гамбурге же цена каучука поднялась за это время с 5 марок за килограмм до 88 марок. С марта 1922 г. к апрелю цена в Гамбурге скакнула вверх более, чем на одну треть, – с 75 марок до 102; в Лондоне же цена держалась без изменения на 8 пенсах. С декабря 1921 г. по январь 1922 г. цена в Гамбурге понизилась со 100 марок до 88 марок, а цена в Лондоне поднялась с 11 пенсов до 11 1/4 пенса.

Такие отраженные колебания товарных цен, обусловленные сдвигами валютных котировок, необходимо тщательно учитывать при попытках составить представление о ценах современнаго мирового рынка и об их колебаниях.

3. Одно время многие были склонны ожидать больших трудностей для возобновления мирового товарообмена со стороны морского транспорта. Боялись, что гибель судов за годы войны скажется острой нехваткой тоннажа. Думали, что не обойтись без строжайшей регулировки морских перевозок в течение ряда лет, пока не восстановится равновесие между количеством грузов, ожидающих доставки, и вместимостью судов, имеющихся в распоряжении. Вырабатывали заранее планы распределения очередей между грузами в соответствии с остротой нужды в них. Готовились к напряженнейшему соперничеству между всеми странами, ко всеобщей погоне за тем, чтоб получить в свои руки возможно большую долю мирового коммерческого флота, к попыткам перехватить друг у друга и готовые и еще только строящиеся суда и даже очереди на постройку. На рынке судов и фрахтов предвидели небывало благоприятную конъюнктуру на неопределенное множество лет вперед.

Все эти страхи и надежды оказались сильно преувеличенными. Период напряженного спроса на морские перевозки, очень высоких фрахтов и безумно высоких цен на суда длился недолго. Высшая точка была достигнута уже к лету, к осени 1919 г. В начале 1920 г. явственно наметился перелом. Падение фрахтов продолжалось до весны 1921 г. И сменилось тянущимся более года застоем: фрахты колеблются неправильно на крайне пониженном уровне, который опустился бы и еще ниже, если бы на сжавшийся спрос судовладельцы не ответили массовым сжатием предложения, – снятием тоннажа с рынка в небывалых размерах. Миллионы тонн были поставлены в портах на покой.

Своей высшей точки количество судов, временно изъятых изъ коммерческого оборота, достигает к началу 1922 г., когда вместимость их оценивается более, чем в десяток миллионов тонн. К весне 1922 г. оно осязательно сокращается, но все же продолжает исчисляться в цифрах, превышающих все, что когда-либо наблюдалось в годы кризисов до войны. Стоят без движения суда, сидит без работы и обслуживавший их персонал: в три десятка тысяч оценивалось в начале 1922 г. число безработных моряков коммерческого флота в Соед. Королевстве (речь Фр. Льюиса на годичном собрании Chamber of Shipping of the United Kingdom).

Столь резкое расхождение действительного хода конъюнктуры с ожиданиями, складывавшимися к концу войны, обусловлено ошибками в оценке предложения тоннажа, с одной стороны, и спроса на него, с другой. Ущерб, нанесенный подводными лодками, был громаден. Общая убыль тоннажа за годы войны оценивается в добрых полтора десятка миллионов тонн, – в треть, примерно, всего количества, имевшегося перед войной. Но размах, с которым развивалось судостроение, был еще более грандиозным. Уже к середине 1919 г. убыль мирового тоннажа за годы войны была восполнена, и грузоподъемность мирового торгового флота начала превышать наивысший уровень, достигавшийся до войны. Со средины 1921 г. в распоряжении мирового хозяйства имеется на 12 – 13 миллионов тонн более, нежели имелось к началу войны, в средине 1914 г.

Правда, к высоким цифрам послевоенного тоннажа необходимо внести ряд существенных поправок, заметно понижающих оценку его работоспособности. Но все же не подлежит сомнению, что мировой коммерческий флот быстро восстановил свою мощь настолько, чтобы быть в состоянии справиться с очень высокими запросами. Между тем запросы на морские перевозки оказались несравненно ниже, чем ожидалось. Казалось, наголодавшаяся и обтрепавшаяся Европа с жадностью набросится на запасы продовольствия и сырья, накопившиеся в дальних заокеанских странах. Казалось, массами потекут оттуда, засыпая все доступные средства перевозки, и хлеб, и шерсть, и хлопок и т. д. Так поначалу и было.

Но быстро картина переменилась. Вместо того, чтобы держаться на небывалой высоте, мировой товарообмен упал ниже довоенного своего уровня. Денежные обороты внешней торговли достигли, действительно, рекордных цифр, но не вследствие того, что оборачивалось и перевозилось много товара, а исключительно из-за чрезвычайной высоты цен. В весовых же и в объемных единицах мировой товарообмен не только не ставит рекордов, но, напротив, далеко отстает от былого. Вывоз из Соед. Королевства превышал, например, в 1913 г. 91 милл. тонн, а в 1920 г. измерялся лишь 29,5 миллионами тонн, в 1921 г. достигал лишь 33 милл. тонн. Ввоз в Соед. Королевство с 56 милл. тонн въ 1913 г. упал до 45,6 милл. тонн в 1920 г. и до 39 милл. тонн в 1921 г. Общее количество обмениваемых в мировой торговле товаров не превышает в начале 1922 года половины довоеннаго оборота (оценка Fr. Goodenough в речи на годичном собрании акционеров Barclays Bank 25 января

1922 г.) Размеры морских перевозок в средине 1922 года оценивается в 70 проц. довоенного (речь Фр. Льюиса на годичном собрании акционеров The Prince Line 17 октября 1922 г.). Мировой рынок восстанавливается так слабо, что не в состоянии предъявить спроса на морские перевозки даже в размерах довоенного времени. Стеснения хозяйственного общения, валютный развал слишком затрудняли эти годы переброску грузов оттуда, где имеются избытки, туда, где население изнывает от безтоварья.

Но в еще большей мере препятствует росту внешней торговли упавшая покупательная способность населения значительной части земного шара. Со всеми стеснениями оборота мировая торговля сумела бы в конце концов справиться, – устранить их или обойти их. Но раз предъявляющему спрос населению нечем платить за нужные ему товары, торговля становится невозможной, и зерно сжигается по одну сторону океана в то время, как по другую его сторону люди умирают от голода. Те, кто, правильно оценивая остроту безтоварья, усматривали в ней источник напряженного спроса, недоучитывали, до какой степени это безтоварье равнозначно малой платежеспособности обнищавших потребителей. Об это препятствие и разбиваются усилия оживить мировой товарообмен. Не в технике перевозок, не в слабосилии транспорта причина той медлительности, с какой восстанавливается мировое хозяйственное общение. Корни лежат глубже: во всеобщем оскудении, в резком понижении трудовой энергии изможденного войной человечества, в сокращении рабочего дня и – быть может, более всего – в нелепых условиях так называемого *мира*, не дающих взяться за починку подточенных основ материального благосостояния со спокойной уверенностью в том, что завтрашний день не принесет новых катастроф и не лишит трудящегося плодов его трудового напряжения.

4. Разобщенность национальных рынков за годы войны оставила следы на строе хозяйства, которые не изгладятся без остатка и после того, как отпадут все преходящие тормозы мирового хозяйственного общения и восстановится мировой рынок в его былой довоенной свободе. Для ряда товаров условия мирового снабжения и образования цен на мировом рынке будут складываться по-новому, вследствие глубоких сдвигов в спросе на них и в их предложении.

Разъединенные войной страны были отрезаны от притока заграничных товаров, к которым население привыкло до войны. Приходилось налаживать отечественное производство их или искать замены. Пошли в ход всяческие суррогаты. Спрос направился в новую сторону. Во множестве случаев замена оказалась настолько низкокачественной, что при первой возможности потребитель стремится вернуться к былым источникам снабжения: так, например, замена недостававших текстильных материалов в Германии крапивой, как ни похвалялись ей в свое время изобретатели, не явилась прочным приобретением народного хозяйства, и сейчас крапивные ткани не играют на рынке видной роли. Нередко, однако, новые способы покрытия потребностей оказываются живучими; у населения успели сложиться новые привычки и новые вкусы, с которыми придется считаться и бороться поставщикам товаров, покрывавших те же потребности до войны.

Одним из наиболее ярких примеров является оттеснение сливочного масла маргарином. Производство маргарина повсеместно возросло за войну, потребление его чрезвычайно поднялось. Даже в Англии маргарин успел пустить глубокие корни: с 1913 г. по 1918 г. потребление маргарина в Англии выросло вдвое; производство же маргарина поднялось в три с половиной раза, так как сжался, а затем и прекратился, ввоз. Вместе с тем сильно усовершенствовались способы производства, очень улучшилось качество маргарина. Против хорошего сливочного масла маргарин все же, конечно, не выстоит и теперь, но в лучших своих сортах он так мало уже уступает маслу, что при сравнительно не очень большой разнице в цене способен ныне вытеснять масло с рынка. Маслу же не первосортному придется еще более страдать от конкуренции маргарина. Таким образом, на послевоенном мировом рынке движение цен на сливочное масло будет в значительной мере определяться факторами, с которыми до войны не было необходимости считаться в такой степени: ценой маргарина, настроением рынков сырья, из которого вырабатывается маргарин, и т. п.

Другой пример: рост спроса на нефть в связи с широким переходом морского военного и коммерческого флота с угля на мазут. На мировом рынке горючих веществ наблюдаются сдвиги, делающие его, можно сказать, неузнаваемым для того, кто вздумал бы примеряться на недавние, довоенные представления о нем. А тех косвенных отражений, которыми чреваты эти сдвиги, с ясностью и не окинешь пока взором: они налагают печать не только на строй мирового хозяйства, но и на ход мировой политики держав, распоряжающихся судьбами земного шара.

Сходным образом те усилия, которые повсеместно были прилагаемы к тому, чтоб в большей мере покрывать внутренний спрос внутренним производством и сделать внутренний рынок возможно независимым от подвоза из-за границы, далеко не во всех случаях увенчались прочным успехом, но в некоторых областях привели к результатам, существенно меняющим картину мирового рынка против довоенной поры. Взять хотя бы производство красок: позиция Германии на мировом рынке красок будет теперь во многом иная, нежели до войны; сфера ее монополии значительно сузилась, а вместе с тем испытали существенные перемены и условия образования цен на краски на мировом рынке.

Другой пример: калийные соли. Хотя по части добывания их почти нигде, несмотря на крайние усилия, не достигнуто больших успехов, но вследствие отхода Эльзасских залежей к Франции былая монополия Германии все же разбита. В 1913 г. Германия поставила на мировой рынок почти 99% поступившего на него количества калийных солей; в 1921 г. более 1/7, в 1920 г. почти 1/4 приходились на Францию, Соед. Штаты и Брит. Индию. Если не последует тесного соглашения между французскими и германскими предприятиями, то строй мирового рынка калийных солей, уровень и характер колебаний их цен будут складываться ныне совсем по иному, чем в первом десятилетии двадцатого века.

Еще более глубокие перемены испытал рынок азотистых соединений. Монополия Чили начала колебаться уже до войны; теперь она окончательно разбита: добыча чилийской селитры в 1921 г. не достигает и половины добычи 1913 года, вывоз сократился с 1913 г. к 1921 г. в два с половиной раза; Германия поставляет ныне на мировой рынок почти такие же количества, как Чили; сильно возросло также производство в Соед. Штатах, в Японии. Изменился в корне и самый характер снабжения мирового рынка: человечество становится независимым отъ залежей, обнаруженных, к счастью предшествовавших поколений, в одном из дальних углов земного шара; благодаря успехам химической технологии оно получает возможность черпать азот въ любых количествах из неистощимого запаса его в воздушной атмосфере в порядке фабрично-заводского производства: чем больше будет спрос, тем дешевле будет обходиться продукт.

К переменам в условиях спроса и предложения отдельных товаров следует добавить общее перераспределение хозяйственной мощи между странами, – в первую очередь, сказочный рост веса Соед. Штатов в мировом хозяйственном общении. Да и в хозяйственной структуре отдельных стран произошли перемены, существенно затрагивающие строй мирового рынка: сосредоточение производительных сил в руках немногих распорядителей – концентрация банков, слияние промышленных предприятий в грандиозные *концерны* – сделали поистине ошеломляющие успехи за истекшие годы. Все это, вместе взятое, так меняет облик начинающего восстанавливаться мирового рынка по сравнению с тем, как он выглядел до войны, что на былые представления становится почти невозможным опираться. Требуется тщательный пересмотр всех условий образования цен для каждой группы товаров, чуть что не для каждого сорта товара. Лишь на такой основе можно разобраться в движении цен, можно сколько-нибудь уверенно предучитывать их грядущие колебания. Самое надежное знание былых путей мировой торговли, былых распорядков мирового рынка теперь обманчиво: без внимательной сверки сложившихся некогда представлений с новыми условиями старый жизненный опыт способен ныне вести к опасным ошибкам, к расчетам, которые жизнь будет опрокидывать самым бедственным образом. Никогда, быть может, не ощущалась так остро, как ныне, потребность в углубленном осмыслении той жизненной среды, в которой торговцу и промышленнику приходится действовать, – заказывать, принимать заказы, продавать, платить. Никогда не были так наглядны преимущества систематического научного знания перед полуинстинктивным здравым смыслом, опирающимся на устарелый жизненный опыт: в обстановке, близкой к той, в которой жизненный опыт сложился, он способен давать надежные указания, но он лишен способности сразу применяться к быстрой смене условий, легко вырождается тут в рутину и начинает предательски обманывать оказываемое ему доверие.

5. Если, вдумавшись в отличия послевоенного мирового рынка от довоенного, мы начнем всматриваться в картину колебаний товарных цен за протекшие с окончания войны годы, то нас не удивит ее пестрота. Скорее покажется удивительным то обстоятельство, что в движении цен в разных странах все же замечается немало сходных черт. За первые месяцы по окончании военных действий цены, сильно поднявшиеся за войну, идут вниз. К весне 1919 г. падение останавливается и – где раньше, где несколько позже – сменяется новым ростом цен, тянущимся около года и круто вздымающим их уровень за этот недолгий срок гораздо выше, чем подняла его повышательная волна четырех лет войны.

С весны, с лета 1920 года намечается новый перелом: цены катятся вниз. Понижательное движение длится в общем около двух лет. Кривая идет вниз почти без перебоев, порой с очень крутым уклоном. Уровень цен падает более, чем вдвое, против наивысшей точки. Движение идет по-разному для разных товаров; цены некоторых приближаются к довоенным, даже спускаются ниже их; цены других, несмотря на сильное понижение, все же остаются выше довоенных. В Англии, например, американский хлопок уже в начале 1921 г. достигает для некоторых сортов довоенного уровня; джут падает ниже довоенных цен, но лен продолжает держаться сравнительно очень крепко; медь спускается ниже довоенной расценки, на железо же цены стоят сравнительно высокие. К 1922 г. темп движения замедляется, падение приостанавливается, затем цены начинают крепнуть. В средине 1922 г. для ряда руководящих стран мирового хозяйства можно уже с уверенностью утверждать, что волна цен вступила в новую повышательную фазу.

Так складывается картина в Англии, в прочих европейских государствах с не слишком расстроенным денежным обращением, в Соед. Штатах: в подробностях наблюдаются некоторые различия, но общие черты везде те же В Соед. Штатах, например, первая понижательная волна сказывается позднее и слабее, – 1918 год стоит до конца под знаком не спадающих цен, и лишь январь, февраль 1919 г. обнаруживают вполне явственный уклон цен вниз, быстро сменяющийся, как и в Европе, новым повышением. К весне 1920 г. цены круто вздымаются до высоты, невиданной в Соед. Штатах с 1864 года, – для пищевых продуктов превышают даже уровень 1864 г. Высшая точка достигается в мае 1920 г. Затем цены начинают падать. В июле, в августе 1921 г. намечается как будто перелом, но оживление оказывается непрочным, и в сентябре, в октябре цены снова дают уклон вниз. Низшая точка приходится на начало 1922 г. Оправляться цены начинают ранее, чем в Европе; крепнут они вяло и нерешительно, но в целом все же достаточно отчетливо, и к средине 1922 г. первоначальные сомнения в прочности перемены, можно сказать, рассеиваются.

Совсем по-иному складывается движение цен в странах с продолжающей обесцениваться денежной единицей. Здесь колебаниям в расценке валюты принадлежит господствующая роль; ими и определяются ближайшим образом изгибы кривой цен. Общий же уклон кривой вверх обусловливается совокупным действием прогрессирующего обесценения денежной единицы и постепенного сближения цен внутреннего рынка с мировыми. Действие последнего момента с большой отчетливостью проступает, например, в Германии, где уровень цен на внутреннем рынке, сдерживаемый нажимом государственной власти, далеко отстает от мирового и даже в средине 1922 г. лишь для немногих продуктов отечественного труда – важнейший из них сталь – достигает этого предела.

На совершенно своеобразной картине движения цен в России я не останавливаюсь, – отчасти за неимением достаточно точных материалов, главнейше же потому, что Советская Россия оставалась эти годы почти наглухо замкнутой для подвоза товаров извне, и русский рынок для мирового хозяйства как бы не существовал. Отмечу лишь одну характерную черту, резко отличающую взаимоотношения между ценами внутреннего рынка и мировыми ценами в России, от того, как обстоит хотя бы в Германии. Германская марка сильнее обесценена на внешних валютных рынках, нежели во внутреннем торговом обороте; товарным цены в Германии, по переводе на золото или в *благородные* валюты, оказываются ниже цен мирового рынка.

Напротив, советский рубль так обесценился внутри России, что русские товарные цены по пересчете хотя бы в германские марки оказываются по большей части выше германских. В силу этого равнение цен внутреннего рынка по мировым, удорожающее жизнь в Германии, было бы сопряжено в России с удешевлением товаров, – в маловероятном, впрочем, предположении, что оно не сопровождалось бы дальнейшим обесценением рубля в обмене на иностранные валюты.

Если оставить в стороне государства с вполне расстроенным денежным обращением, то при беглом взгляде на кривые цен может составиться, таким образом, впечатление, будто связь между национальными рынками и теперь недалека по силе от былой. Впечатление это, однако, обманчиво. Сходство в движении цен в разных странах обусловливается ныне не столько тем, что цены одной страны давят на цены в других странах и, своим уклоном вниз или вверх, непосредственно тянут в ту же сторону уровень цен повсеместно, сколько сходством в общих условиях существования повсюду в послевоенной обстановке.

В годы войны цены, за немногими исключениями, везде возрастали, но не потому, чтоб подъем в Англии вызывал повышение в Германии или наоборот, а потому, что и в Англии, и в Германии, и в прочих странах на ценах сказывалось сходным образом действие войны, – затруднение подвоза, оскудение запасов, обесценение денежной единицы и т. д. Так и в послевоенную пору цены обнаруживают сходные движения, главнейше, потому, что в каждой стране, независимо от других, условия образования цен складываются и изменяются по-сходному.

Углубленное выяснение картины движения цен за послевоенные годы требовало бы подробного рассмотрения отдельных товаров. Средний уровень цен, движения которого очерчены выше, сглаживает весьма существенные различия при более нормальных условиях хозяйственной жизни. Для рынка же послевоенного чрезвычайная пестрота в движении цен различных товаров является одной из отличительных черт. Средний уровень цен приобретает, в силу этого, еще более условный характер, нежели обычно. Об этом явственно свидетельствует то обстоятельство, что самое представление о движении среднего уровня складывается для любой страны далеко не по-одинаковому в зависимости от того, как мы выводим среднюю, какие группы товаров берем и с каким весом.

Для Англии, например, известные показатели *Statist* и не менее известные показатели журнала *Economist* дают для конца 1918 г. и начала 1919 г. картину явственного понижения, тогда как показатели Board of Trade с января по март 1919 г. идут слегка вверх, но обнаруживают уклон книзу в апреле, мае 1919 г., когда индексы *Стэтиста* и *Экономиста* говорят уже о начавшемся повышении. Сходным образом для Соед. Штатов сводный показатель Bradstreet непрерывно нарастает, начиная съ июля 1921 г., тогда как все прочие показатели отмечают осенью 1921 г. новый спад волны.

Этот характерный разнобой в движении цен разных товаров является ясным свидетельством того, что волны кривой общего уровня цен в меньшей, нежели обычно, мере отражают на себе влияние тех общих факторов, к действию которых экономическая теория пытается свести наблюдающуюся в хозяйственной жизни смену периодов оживления и застоя. Конъюнктура послевоенного мирового рынка характеризуется не только сравнительной разобщенностью национальных рынков, но и сравнительной оторванностью друг от друга цен на разные товары на внутреннем рынке одного и того же государства.

Всматриваться в колебания цен отдельных товаров и их причины не может входить в задачи настоящей статьи, я позволю себе лишь остановиться на важнейших из тех общих моментов, которым обязан своим происхождением замечающийся все же и после войны параллелизм в движении уровня цен на разных, столь плохо сообщающихся между собой, рынках.

О том, чем вызывалась повышательная волна, почти нет надобности распространяться. Европа вышла из войны материально разоренной. Истощены были запасы всего, что могло идти на потребу. Во множестве разрушен и повсеместно изношен мертвый инвентарь народного хозяйства, почти не знавший ремонта в течение четырех лет: пути сообщения, здания, машины и прочее оборудование фабрик и заводов, – вплоть до угольных и иных копей, разработка которых велась без заботы о завтрашнем дне с единственным помыслом извлечь возможно больше сегодня, – вплоть до плодородия почвы, хуже обычного обрабатывавшейся и много хуже обычного удобрявшейся. Расточен и измотан *живой инвентарь*, – рабочая сила: миллионы трудоспособных мужчин положили жизнь в боях; миллионы вернулись с фронта калеками и полукалеками. Да и те, кому посчастливилось уцелеть на фронте и выдержать, не надорвав здоровья, тяжелые условия существования в тылу, не были способны к полному трудовому напряженно.

Производительность труда потерпела сильный и длительный урон. А в то же время был сокращен рабочий день. Чрезвычайно возросшим потребностям противостояла чрезвычайно повсюду сократившаяся производительная мощь населения. К этому присоединялось вздорожание перевозок, – рост морских фрахтов и железнодорожных тарифов. Продолжавшаяся же инфляция обесценивала денежную единицу. В таких условиях, естественно, приходилось ожидать крутого роста цен.

Почему же, несмотря на все это, цены в конце 1918 г., в начале 1919 г. несколько понижаются? Причины лежат как на стороне предложения, так и на стороне спроса. Внезапное окончание войны облегчило подвоз товаров и освободило значительные их запасы. Правительственными и иными организациями, предусмотрительно принимавшими меры к обеспечению снабжения на случай затяжки войны, произведены были повсюду большие заготовки. Массы товаров выдерживались' владельцами на складах в расчете на дальнейший рост цен под давлением военного спроса. Прекращение военных действий внесло неуверенность в расчеты. Явились охотники спешно реализовать барыши, которые можно было взять при державшихся о ту пору ценах.

В населении же проснулась надежда, что теперь, с переходом на мирное положение, хлынут товары на рынок и цены начнут приближаться к мирным. Поэтому, когда товар, действительно, показался на рынке, но по ценам далеко не мирным, от покупок воздерживались, как ни была настоятельна потребность: думалось, что, если повременить еще немного, то купишь значительно дешевле. Поскольку так рассуждает единичный покупатель, – воздержание его от покупки не опасно для торговца. Но в конце 1918 г. так рассуждали массы. И владельцы выпущенных на рынок товаров увидали, к своему ужасу, что товар, который перед тем брали нарасхват чуть не по любой цене, теперь не идет с рук.

Наметилась своеобразная *забастовка покупателей* – забастовка, никем не организованная и никем не руководимая, без взаимного сговора, покоящаяся исключительно на том, что у всех одновременно явилась общая мысль: лучше потерпеть с покупками, – в скором времени достанешь, что нужно, на более выгодных условиях**.** Рассуждение это было по существу ошибочным, исходило из неверных предпосылок. Но в выводы из этих неверных предпосылок дружно уверовали массы, и покоившиеся на нем расчеты, хотя и не находили достаточного оправдания в действительной конъюнктуре, все же в известной мере оправдались.

Забастовка потребителей произвела такой нажим на товаровладельцев, что цены, действительно, дрогнули. Это подлило масла в огонь. *Забастовщики*, видя, что расчет оправдывается, укрепились в вере в правильность своих соображений и продолжали бастовать, а цены продолжали опускаться. Однако, это тянулось недолго: объективные условия скоро взяли верх. Товаровладельцы изменили линию политики, перестали понижать цены а затем начали снова поднимать их. И те же потребители, которые перед тем воздерживались от закупок по пониженным ценам, набросились на дорожавшие товары, расхватывая не только то, что было необходимо, но закупая излишки впрок из страха, что, прозевав, будешь потом платить втридорога. Массовая психология переломилась. Спешный спрос погнал цены форсированным темпом в гору и дал возможность вздуть их до высот, которые, в свою очередь, не находили оправдания в объективных условиях снабжения рынка. Картина эта – воздержание публики от покупок в период понижения цен и расхватывание наперебой всего, что ни попало, при начавшемся повышении – наблюдалась за последние годы неоднократно в разных странах при разных местных переломах конъюнктуры. И всякий раз с новой ясностью обнаруживала способность массовых настроений определяюще влиять на цены даже в тех случаях, когда они в основе своей сводятся к иллюзии.

Это свидетельство о чрезвычайной мощи даже неорганизованного потребителя, поскольку индивидуальные решения, складываясь по-сходному, не погашают друг друга, а дружно суммируются в общую равнодействующую, является одним из поучительнейших выводов из наблюдения над судорожными движениями товарных рынков в послевоенную пору.

Таким образом, первая понижательная волна конца 1918 г., начала 1919 г. обязана своим происхождением – почти можно сказать – недоразумению: цены идут вниз, если и не вопреки рассудку, то все же наперекор стихиям. Отсюда краткосрочность понижения и сравнительно небольшая глубина падения. Иной характер носит вторая понижательная волна, надвинувшаяся в начале 1920 года. Два основных момента создают ее. Непомерно вздувшиеся цены подрезают сбыт; дорогим товарам не противостоит платежеспособного спроса; для обнищавшего за войну человечества они оказываются не по карману. Потребность в них необъятна, но нечем за них платить.

Товара не покупают не потому, чтоб выжидали более выгодных цен, а за неимением средств. Рынок, казавшийся безгранично емким, сжимается. А в то же время энергичная политика дефляции в Соед. Штатах и в Англии и более или менее решительная задержка инфляции в других странах не только останавливают обесценение денежной единицы, но с явственным успехом поднимают ее ценность. Прекращается болезненное подбадривание народно-хозяйственного организма путем впрыскивания искусственно создаваемой покупательной силы, – в виде бумажных денег, легко открываемых банковских кредитов и т. п. Для хозяйственной жизни намечается возврат к более нормальным условиям. Это позволяет начать вновь сильнее проявлять свою мощь тем общим причинам, которые и перед войной вызывали непрерывную смену периодов подъема и упадка пульса хозяйственной деятельности. Безумно высокий уровень цен 1919 – 20 гг. сменяется угнетенно-понижательным настроением, которое держится почти два года.

6. В интересной статье С. А. Первушина о конъюнктуре современного хозяйства в московском журнале *Вестник*

Статистики[22] ставится вопрос об общем характере переживаемой ныне полосы хозяйственной жизни. Из приводимых автором ссылок видно, что вопрос этот подвергается в России оживленному обсуждению. Высказываются самые противоречивые взгляды. Некоторые полагают, что кризис, "постигший в средине 1920 г. мировое хозяйство, – это в сущности обычный капиталистический кризис, запоздалый очередной кризис, появление которого специалисты на основании ряда симптомов предсказывали еще на 1912, на 1914 гг. Мировая война … отодвинула этот кризис ... но ничуть не изменила его существа, как нормального кризиса, как определенной фазы капиталистического цикла". "По мнению других, современный кризис ... наиболее сходен с кризисом 1815 г., с кризисом стихийной хозяйственной ликвидации наполеоновских войн".

Наконец, третья точка зрения видит в нем "кризис совершенно особого порядка, за которым возврата к прошлому нет, который таит в себе начало коренной перестройки всего социального, хозяйственного и культурного уклада Европы", причем, "в этой третьей точке зрения сошлись два различных течения, – оптимистическое и пессимистическое. Для первых выход на высшую хозяйственную ступень возможен, но лишь ценой полной перестройки социальных отношений. Последнее течение этого выхода не представляет: в современном длительном кризисе оно видит начало подлинного краха Европы … возврат к хозяйственному и культурному средневековью и разложение высших хозяйственных форм, – пользуясь термином Шпенглера: Untergang des Abendlandes"[23].

Сам автор сосредоточивается, главнейше, на статистическом анализе цифрового материала, приглашая констатировать, прежде всего, факты. Путь к выяснению вопроса, если и не самый легкий, то в конечном счете все же самый краткий! Ибо факты складываются в отчетливую картину, вводящую умозрение в твердые и сравнительно весьма тесные рамки. Начало нового оживления хозяйственной жизни с конца 1921 г., уловляемое Первушиным не на движении цен, – на ценах тогда еще не сказывалось явственного перелома, – а посредством искусного сопоставления иных рядов показателей конъюнктуры, наглядно обнаруживает несостоятельность той *третьей* группы взглядов, которая усматривала в кризисе1920 – 21 гг. начало конца Европы, – крах, за которым нет возврата к прошлому. С другой стороны, факты рассеивают и представление о перескочившей каким-то чудом через годы войны очередной фазе нормального кризиса, надвигавшегося в начале второго десятилетия двадцатого века. Первушин правильно подчеркивает, что "мировой хозяйственный организм после войны еще не совсем выздоровел", что начавшееся оживление происходит "в условиях продолжающегося разрыва хозяйственных связей", в обстановке "денежно-валютного хаоса" и

[22] С. А. Первушин, Конъюнктура современного мирового хозяйства. *Вестник статистики*, май – август 1921 г. Москва, 1922.
[23] Первушин перенял заглавие книги О. Шпенглера (тт. 1 – 2, 1918 – 1922; русский перевод т. 1, *Закат Европы*, 1923). О. Ш.

перебивается все время “действием фактора политического”. Он заключает: “Температура мирового хозяйства, быть может, уже близка к нормальной, но все еще ненормальная: это все еще те 37 и три, 37 и два по медицинскому термометру, которые хорошо знает врач и которыми он обычно не обольщается”. Эта осторожная характеристика делает честь трезвой логике автора, как делает честь его статистической проницательности, что он со своего далеко не благоприятного наблюдательного поста сумел подметить новый перелом конъюнктуры на самых зачаточных его стадиях.
В ней следует, однако, переставить ударения, дабы освободить ее от налета слегка окрашивающей ее полемики. Температура мирового хозяйства, бесспорно, еще не вполне нормальна, но явственно приближается к норме. Разорванные хозяйственные связи восстановлены далеко еще не в полной мере, но некоторое подобие мирового рынка уже успело сложиться и мировое хозяйственное общение быстро крепнет, не взирая на все помехи, которые “политический фактор” нагромождает на пути хозяйственного возрождения. Вместе с тем и колебания в темпе хозяйственной жизни с все большей силой подпадают под действие тех моментов, которыми обусловливается чередование подъема и депрессии в нормальных условиях современного хозяйственного строя. Полоса депрессии 1920 – 21 гг. носила на себе уже более явственные следы их, нежели предшествовавший ей подъем и совершенно аномальная понижательная волна конца 1918 г., начала 1919 г. Надвигающаяся ныне полоса оживления выявляет с еще большей отчетливостью знакомые от прежних времен черты этой “фазы капиталистического цикла”. Мировой послевоенный рынок имеет – и во многом удержит – своеобразный облик, отличный от былого; пути мировой торговли лежат – и будут лежать – в иных, кое в чем, направлениях, нежели прежде. Но общий строй мирового хозяйства остается – и долго еще будет оставаться – тем же в основе своей, как до войны. Никакого перехода к неизведанным хозяйственным порядкам переживаемая ныне полоса не несет с собой, никакого переустройства всего уклада жизни Европы не таит в себе. Об этом можно проливать слезы, можно этому радоваться, – смотря по общему мировоззрению. Но трудно оспаривать это, если глядеть фактам в глаза. Капиталистический хозяйственный строй обнаружил способность вынести военное напряжение, равное которому мир доселе не знал. Способен он вынести и то, что государственной мудрости наших дней угодно именовать миром. Внутренние противоречия капитализма велики и глубоки. Но способность справляться с ними пока что еще больше. Нет более пагубной ошибки, как недооценивать приспособляемость и мощь, проявленные капитализмом – неожиданно даже для большинства его апологетов – в пережитую миром годину небывало тяжких хозяйственных испытаний.