

文章编号: 0455-2059(2001)02-0034-04

完全 π - 正则半群环的单位元

杨海宣

(天津商学院 基础部, 天津 300400)

摘要: 一个完全 $[0-]$ 单半群 S 具有如下性质: 若 $0 \neq e \in E(S), a \in S$ 且 $ea = 0$, 则存在 $f \in E(S)$ 使得 $a = fea$. 本文利用完全 $[0-]$ 单半群的这一性质以及 $[0-]$ 单的完全 π - 正则半群必是完全 $[0-]$ 单的这一事实, 考察了完全 π - 正则半群环的单位元, 最终得到如下结果: 设 S 是完全 π - 正则半群, 则 RS 含单位元当且仅当 $R \in E(S)$ 含单位元, 且存在 $E(S)$ 的一个有限子集 U , 使得 $S = SU = US$. 另得到一个关于完全 $[0-]$ 单半群的一个等价描述: 一个 $[0-]$ 单半群 S 是完全 $[0-]$ 单的当且仅当 S 是左 π - 正则的且 S 包含一个非零幂等元

关键词: 半群环; 完全 π - 正则半群; 左 π - 正则半群

中图分类号: O152.7 **文献标识码:** A

Ponizovskii^[1] 提出下面的问题:

问题 1 什么样的半群环是有单位元的环?

李方^[2] 研究了纯正半群环的单位元存在性问题, 宋光天^[3] 对纯正半群环的单位元存在性问题也进行了研究, 得到了一个充要条件. 宋光天^[4] 中又考虑完全 $0-$ 单半群半格的情形. 杨海宣^[5] 中考虑了 FIC 半群的情形. 杨海宣等^[6] 中首次考虑到一类非正则的半群环(幂等元为带的周期半群环)的单位元存在性问题. 显然, 完全 $0-$ 单半群的半格和周期半群都是完全 π - 正则半群, 因而本文的结论是文[4] 与文[6] 的共同推广.

一个半群 S 称为是完全 π - 正则的, 如果对每一个 $a \in S$, 都存在一个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 a^n 是群元.

在本文中, 符号: $|M|$, 集合 M 的势; $E(S)$, 半群 S 的幂等元集; $R[S]$, 半群 S 在环 R 上的半群环; RS , 半群 S 在环 R 上的简约半群环; I_{RS} , 简约半群环 RS 的单位元(如果 RS 含单位元); X , 由一个半群的子集 X 生成的子半群; $\text{supp}(A) = \{s \in S \mid rs = 0\}$, 其中 $0 \in A = \{r_s \in RS, s \in S, r_s \in R\}$.

文中未声明的符号和概念, 参见[1], [7].

$R[S]$ 含单位元当且仅当 RS 与 R 均含单位元; 若 RS 含单位元, 则 R 含单位元^[1]. 所以总假设系数环 R 均含单位元, 而且仅讨论 RS 的情况.

引理 1^[1] 设 R 是环, S 是半群, 若 RS 含单位元, 则存在有限集 $U \subseteq E(S)$, 使得 $S = US = SU$.

半群同态 $\Psi: S \rightarrow S/\rho; s \mapsto \bar{s}$ 诱导一个满的环同态

$$\Psi: RS \rightarrow R(S/\rho); \quad r_s \mapsto \bar{r_s}$$

收稿日期: 2000-03-23

作者简介: 杨海宣(1968-), 男, 副教授



因此有下面的引理

引理 2 若 RS 有单位元 I , 则 $R(S/\rho)$ 有单位元 $\bar{I} = \Psi(I)$.

引理 3^[7] 设 S 是半群, $0 \neq S, K$ 是 S 的 0-极小理想, 则 $K^2 = \{0\}$, 或 K 是 0-单半群

引理 4^[7] 设 S 是半群, K 是 S 的极小理想, 则 K 是单半群

引理 5 若 $R E(S)$ 含单位元, 且存在 $E(S)$ 的一个有限子集 U 使得 $S = US = SU$, 则 RS 含单位元, 且 $I_{RS} = I_{R E(S)}$.

证明 设 $R E(S)$ 的单位元 $J = I_{R E(S)} = \sum_{i=1}^n r_i b_i, r_i \in R, b_i \in E(S)$. 由 $S = SU$ 知对任意 $s \in S$, 存在 $e \in U, s \in S$, 使得 $s = s e$ 因而 $sI = s eI = s(eI) = s e = s$ 同理可证 $I s = s$, 所以 I 是 RS 的单位元

引理 6^[8] 一个 $[0-]$ 单半群 S 是完全 $[0-]$ 单半群当且仅当 S 是完全 π -正则的

引理 7 设 S 是一个完全 π -正则半群, 若 RS 含单位元, 则 $R E(S)$ 含单位元

证明 假设集合 $A = \{T \mid T \text{ 是完全 } \pi\text{-正则半群, } RT \text{ 含单位元, 但 } R E(T) \text{ 不含单位元}\} \neq \emptyset$, 由此推出矛盾

令 $B = \{|\text{supp}(I_{RT})| \mid T \in A\}$, 则 B 必存在最小元 k , 设 $L \in A$ 使 $|\text{supp}(I_{RL})| = k$.

令 $L_1 = \text{supp}(I_{RL}) = \{a^{r_a}, (a^{r_a})^{-1} a \mid a \in \text{supp}(I_{RL})\}$, 其中 r_a 是最小的正整数使得 a^{r_a} 为群元, $(a^{r_a})^{-1}$ 为 a^{r_a} 的群逆

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 \cup \{a^{r_a}, (a^{r_a})^{-1} a \mid a \in L_1\}; \\ &\vdots \\ L_n &= L_{n-1} \cup \{a^{r_a}, (a^{r_a})^{-1} a \mid a \in L_{n-1}\}; \end{aligned}$$

$$S = \bigcup_{i=1}^n L_i,$$

则 S 是 L 的一个完全 π -正则子半群, 并且 $S \in A, |\text{supp}(I_{RS})| = k$.

令 $C = \{D \mid D \text{ 是 } S \text{ 的理想, } D \cap \text{supp}(I_{RS}) = \emptyset\}$.

若 $C \neq \emptyset$, 则由佐恩引理知必存在极大元, 设 M 为 C 的极大元 令

$$S_1 = \begin{cases} S, & C = \emptyset; \\ S \setminus M, & C \neq \emptyset. \end{cases}$$

由引理 2 及引理 5 知 $S_1 \in A$, 且 $|\text{supp}(I_{RS_1})| = k$. 设 $I_{RS_1} = \sum_{i=1}^n r_i b_i + \sum_{j=1}^m r_j s_j, b_i \in E(S_1), r_i \in R, i = 1, 2, 3, \dots, n; s_j \in E(S_1), r_j \in R, j = 1, 2, \dots, m$. 由 S_1 的定义知, 对于 S_1 的任一非 0 理想 D , 均有 $D \cap \text{supp}(I_{RS_1}) \neq \emptyset$. 由引理 2 知 $R(S_1/D)$ 的单位元 $I_{R(S_1/D)} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \bar{b}_i + \sum_{j=1}^m \bar{r}_j \bar{s}_j$, 因而 $|\text{supp}(I_{R(S_1/D)})| < k$. 由假设和引理 5 知 $R E(S_1/D)$ 含单位元, 且

$I_{R(S_1/D)} = I_{R E(S_1/D)}$. 因而 $I_{R(S_1/D)} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \bar{b}_i$, 故 $s_j \in D (j = 1, 2, \dots, m)$. 这样 S_1 的所有非 0 理想的交 K 非平凡 因而 K 是 0-极小理想或极小理想 由引理 3 和引理 4 知 $K^2 = \{0\}$, 或 K 是 0-单的, 或 K 是单的, 且 $s_j \in K (j = 1, 2, \dots, m)$.

任取 $e \in E(S_1)$, 若 $e(\sum_{j=1}^m e_j s_j) = 0$, 则由 $eI_{RS_1} = e = e(\sum_{i=1}^n r_i b_i) + e(\sum_{j=1}^m r_j s_j)$, 知存在 s_j ,



使得 $0 \in \text{supp} [e(\prod_{i=1}^n r_i b_i) - e]$, 因而 $0 \in E(S_1) \subseteq K$.

因为对于任意的 $a \in E(S_1)$, 都有 $V(a) \subseteq E(S_1)$ 所以由 S_1 的定义知 $S_1 = K \cap E(S_1)$. 现在分以下两种情况考虑:

(1) 若 $K^2 = \{0\}$, 则 $E(S_1) \cap E(S_1)$ 是 S_1 的一个理想(由 $S_1 = K \cap E(S_1)$), 且 $E(S_1) \cap E(S_1) \subseteq K$ (由 $E(S_1) \cap E(S_1) \subseteq K$). 由引理 1, 有

$$0 \in E(S_1) \cap E(S_1),$$

所以 $E(S_1) \cap E(S_1) = K$ (由 K 是 0- 极小理想或极小理想). 这样 $S_1 \cap K = E(S_1) \cap E(S_1) \subseteq E(S_1)$ (由 $E(S_1) \cap E(S_1) = K$), 这与 $S_1 \not\subseteq E(S_1)$ 的假设矛盾

(2) 若 K 是 0- 单的或 K 是单的, 则由 K 也是完全 π - 正则半群与引理 6 知 K 是完全 [0-] 单半群 令 $(e_{s_j}) \in V(e_{s_j}), g = (e_{s_j})(e_{s_j})e$, 则 $g \in E(K)$ 且 $g s_j = (e_{s_j})(e_{s_j})e s_j \in K$. 由下面的引理 8 知存在 $f \in E(K)$, 使得 $s_j = f g s_j = f(e_{s_j}) \in E(S_1)$ 这与 $S_1 \not\subseteq E(S_1)$ 的假设矛盾

所以 $e(\prod_{j=1}^m r_j s_j) = 0$ 的假设是错误的 这样对于每个 $e \in E(S_1)$, 都有 $e(\prod_{j=1}^m r_j s_j) = 0$ 再由 $e = e I_{RS_1} = e(\prod_{i=1}^n r_i b_i) + e(\prod_{j=1}^m r_j s_j) = e(\prod_{i=1}^n r_i b_i)$, 有 $e(\prod_{i=1}^n r_i b_i) = e$ 同理可证 $(\prod_{i=1}^n r_i b_i)e = e$ 因而 $\prod_{i=1}^n r_i b_i$ 是 $R \cap E(S_1)$ 的单位元, 这与 $S_1 \not\subseteq A$ 矛盾 所以 $A = \emptyset$.

引理 8 设 $S = M^{[0]}(G; I, \Lambda; P)$ 是一个完全 [0-] 单半群, $0 \in e \in E(S)$. 若 $ea = 0$, 则存在 $f \in E(S)$ 使得 $a = f ea$.

证明 令 $e = (p_N^{-1}, i, \lambda), a = (g, j, \mu)$. 由 $ea = 0$, 知 $p_N = 0$, 令 $f = (p_N^{-1}, j, \lambda)$, 则 $f ea = (p_N^{-1}, j, \lambda)ea = (p_N^{-1}, j, \lambda)(p_N^{-1} p_N g, i, \mu) = (p_N^{-1} p_N p_N^{-1} p_N g, j, u) = (g, j, \mu) = a$. 由引理 1, 引理 5, 引理 7 知

定理 9 设 S 是完全 π - 正则半群, 则 RS 含单位元当且仅当 $R \cap E(S)$ 含单位元, 且存在 $E(S)$ 的一个有限子集 U , 使得 $S = US = SU$.

在引理 7 的证明过程中, 引理 6 起到了关键的作用, 下面给出引理 6 的等价描述

一个半群 S 称为是左 π - 正则的, 如果对每一个 $a \in S$, 都存在一个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $a^n \in Sa^{n+1}$. 显然一个完全 π - 正则半群一定是左 π - 正则的 则有

定理 10 一个 [0-] 单半群 S 是完全 [0-] 单的当且仅当 S 是左 π - 正则的且 S 含一个非 0 的幂等元

证明 设 S 是 [0-] 单的且 S 是左 π - 正则的 设 $0 \in e \in E(S)$, 将证明 e 是本原的 假设 $f \in E(S)$ 且 $ef = fe = f = 0$ 由 S 的单性知存在 $h, k \in S$, 使得 $e = hfk$. 令 $h = ehf, k = fke$, 则 $eh = h = hf = hfe = he$ 因而

$$e = hfk = (ehf)(fke) = hk = hek = h^2ek^2 = h^2k^2 = \dots = h^r k^r.$$

因为 S 是左 π - 正则的, 所以存在 $x \in S, n \in \mathbb{N}$ 使得 $h^n = xh^{n+1}$. 有

$$e = h^n k^n = xh^{n+1} k^n = (xh)e = x(he) = xh,$$

$$f = ef = (xh)f = x(hf) = xh = e$$



所以 e 是本原的, 因而 S 是完全 $[0^-]$ 单的

若 S 是完全 $[0^-]$ 单的, 则显然 S 是完全 π 正则的, 因而是左 π 正则的, 且包含非 0 幂等元
证毕

参 考 文 献

- [1] Ponizovskii J S. Semigroup rings[J]. Semigroup Forum, 1987, 36: 1~ 46
- [2] Li Fang. The existence of identity of semigroup rings[J]. Semigroup Forum, 1993, 46: 27~ 31.
- [3] Song G. Identities of orthodox semigroup rings[J]. Semigroup Forum, 1995, 49: 239~ 246
- [4] Song G. Identities of semigroup rings over semilattices of completely (0^-) simple semigroups[J]. Semigroup Forum, 1996, 51: 295~ 298
- [5] Yang H. Identities of regular semigroup rings[J]. Semigroup Forum, 1998, 57: 293~ 295
- [6] 杨海宣, 曹聪, 杨丙申. 周期半群环的单位元[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1997, 33(2): 11~ 13
- [7] Howie J M. An introduction to semigroup theory[M]. London: Academic Press, 1976
- [8] Bogdanovic S. Semigroups with a system of subsemigroups[M]. Novi Sad: University of Novi Sad Press, 1985

The Identity of Completely π -Regular Semigroup Rings

Yang Haixuan

(Department of Basic Courses, Tianjin College of Commerce, Tianjin, 300400, China)

Abstract: A completely $[0^-]$ simple semigroup S has the following property: If $0 \neq e \in E(S)$, $a \in S$, $ea = 0$, then there exists $f \in E(S)$ such that $a = fea$. This property and the property that a $[0^-]$ simple completely π -regular semigroup must be completely $[0^-]$ simple are used in investigating the identities of completely π -regular semigroup rings, and the following result is obtained: Let S be a completely π -regular semigroup, then RS is a ring with identity if and only if $R \cap E(S)$ is a ring with identity, and there exists a finite subset U of $E(S)$ such that $S = SU = US$, where $E(S)$ denotes the subsemigroup generated by the set $E(S)$. Moreover, an equivalent description on a completely $[0^-]$ simple semigroup is obtained: A $[0^-]$ simple semigroup S is completely $[0^-]$ simple if and only if S is left π -regular and S contains a non-zero idempotent.

Key words: semigroup ring; completely π -regular semigroup; left π -regular semigroup

MR(1991) Subject Classification: 20M10